

NATIONAL INSTITUTE FOR FUSION SCIENCE

プラズマのカオス現象 [まとめ]

代表者 河合良信

(Received - Sep. 29, 1993)

NIFS-MEMO-12

Oct. 1993

RESEARCH REPORT
NIFS-MEMO Series

This report was prepared as a preprint of work performed as a collaboration research of the National Institute for Fusion Science (NIFS) of Japan. This document is intended for information only and for future publication in a journal after some rearrangements of its contents.

Inquiries about copyright and reproduction should be addressed to the Research Information Center, National Institute for Fusion Science, Nagoya 464-01, Japan.

平成4年度
核融合科学研究所共同研究
(調査支援研究)
研究成果報告書

プラズマのカオス現象 [まとめ]

代表者 河合 良信
(九州大学総合理工)

Chaotic Phenomena in Plasma, III

Y.Kawai

Interdisciplinary Graduate School of
Engineering Sciences, Kyushu University,
Kasuga, Fukuoka 816, Japan

Abstract

To review the present status of the research on plasma chaos, a working group was organized in 1990 as a collaboration research of National Institute for Fusion Science and ended on March 1993. This is the report on the activity which contains both experimental and theoretical works.

Keyword : Chaos, sheath, electron-beam, RFP, dynamo, self-organization, stochastic magnetic field, Alfvén wave

最近、プラズマ中のカオスに関する研究が内外で注目されるようになった。元々、カオスの研究は、ミラー磁場中の波動加熱や磁力線のカオス等の研究にみられるように、プラズマ物理・核融合の研究者が先駆者であった。このことを踏まえて、プラズマ中のカオス現象に関する研究を、核融合科学研究所支援調査共同研究の一環として調査してきた。本報告は、これらを平成2年より4年の3カ年間まとめたもので、その内容は磁力線のカオス、基礎実験、RFP, トカマク, スペースの広い範囲に及んでいる。なお、カオスについて初心者向けに散逸系カオスの定量化の説明を詳しく行った。

河合 良信 (代表者：九州大学大学院総合理工学研究科)

羽鳥 尹承 (世話人：核融合科学研究所)

12. RFPプラズマのダイナモ構造のシミュレーション解析	-----	111
大阪工大	長田昭義	
名大・プラズマ科学	佐藤絃一	
電総研	芦田久男	
核融合研	天野恒雄	
13. 逆磁場ピンチにおける磁場の自己組織化とカオス	-----	117
磁場解析の課題		
電総研	平野洋一、	
	P. Brunzell、	
	八木康之、島田寿男、	
	前嶋良紀、弘田 公	

第一章 はじめに

近年の非線形力学の研究、特に少数自由度のカオスの研究は、自然界で観測される不規則な現象の理解の仕方に、変革をもたらしつつある。

非線形力学の中で、ソリトンが無限自由度の系が単純な構造を持つ場合に現われる現象であるのに対して、カオスは少数自由度の力学系で生じる不規則な振舞いである。従来、自然界の中で不規則な現象を観測したとき、この現象を熱雑音のように系の持つ自由度が多いことによる予測不可能な現象（非決定論的プロセス）であると考えていた。しかし、少数自由度の力学系（決定論的プロセス）が、不規則な振舞いを行い得ることは、この様な従来の不規則現象に対する理解の仕方に変更を迫ったのである。

ところで、不規則現象を観測したとき、これが上述の非決定論的（確率論的）プロセスによるものか、決定論的プロセス（カオス）によるものかをどの様にして判定出来るのであろうか。Feigenbaumはいくつかの数学的モデルを用いて、周期状態からカオスへ至る分岐現象（bifurcation）をくりこみ群の方法で定量化（Feigenbaum定数）することに成功した¹⁾。流体の実験でこの普遍定数が確認されたことにより、カオスの実験的研究に火をつけることになった。この結果、物理学、化学、電気工学、その他多くの分野でカオス的現象（bifurcation）が存在することが明らかになった。しかし、単にカオスの普遍的性質を確認し、カオスの存在を示すだけでは発展性がなく、カオスをより詳しく定量的に特徴づける必要が

ある。

カオス、特に散逸系のカオスについては、カオスを特徴づける定量的概念の理論的研究が進んでいる。その中でも、Grassberger と Procaccia が²⁾、相関次元の概念とそれを实际的に求める手法を開発したことは、カオスの実験的研究の新しい展開を促すものとして注目すべきことである。また、現在、実験的研究に於いては次元の概念を発展させた $f(\alpha)$ スペクトル³⁾という概念を用いて、流体中で観測された現象と簡単な数学的モデルとが一致することを示す研究が行われるまでに至っている⁴⁾。

一方、プラズマの分野の実験で、bifurcation が電子ビーム・プラズマ系⁵⁾やイオンビーム・プラズマ系⁶⁾、及び放電系⁷⁾で観測されたという報告、あるいは、間欠性カオスの特徴である、スペクトルの $1/f$ ノイズが放電系で観測されたという報告⁸⁾がなされている。また、大野らは、電流駆動プラズマ系で、bifurcation を観測し、Feigenbaum 定数を求めている⁹⁾。さらに、Barkley らは¹⁰⁾、トカマク・プラズマで得られた信号から相関次元を求めたと報告している。しかし、この報告は解析手法に問題があり信憑性が薄いと考えられる。いずれにしろ、プラズマや放電の分野では、現在までのところカオスの普遍的性質を確認する研究に留まっている。

最近、カオスに関するテキストが多く出まわっているが、初心者向けに第二章と第三章で散逸系カオスの定量化を紹介するので参考にされたい。なお、これらの内容は宮下豪氏（現在 日立製作所）の修士論文からの転載、加筆したものである。

第二章 散逸系カオスの理論的背景

2-1 カオスの定義

カオスは、

- 1) 力学系（保存系、散逸系を含めて）の解が不規則に振舞うこと
- 2) 解の相空間での軌道が不安定であること

と定義されている¹¹⁾。1)の性質は、解の波形のパワースペクトルの広がりとして示され、2)の性質は、相空間の近接軌道の時間経過にともなう指数関数的な広がりとして示される。散逸系では、相空間の体積は時間とともに縮小するが、2)の性質によりある方向には広がらなければならない。しかし、相空間の軌道は有限な大きさを持ち、交わることはできないので、折りたたまれるという性質を持つことになる。従って散逸系カオスの場合、相空間の軌道が自己相似的なフラクタル性を持つことになり、逆に、このフラクタル性を見積ることにより、散逸系カオスを特徴づけることが出来る。フラクタルの概念については2-3節で詳しく述べる。

このように散逸系カオスでは、相空間の軌道が重要である。この軌道が、時間を無限大にしたとき落ち込むような集合の閉包のことをアトラクターと呼ぶ。そしてアトラクターのうちで、軌道が時間空間的に不安定であるものをストレンジアトラクターと呼ぶ¹²⁾。

前節のカオスの定義に於ける 2) の性質は、初期値の僅かな違いが将来大きな差をもたらす（初期値依存性）ことを示している。物理現象の観測では誤差を除くことが不可能であることを考えれば、この性質は、観測に於ける最初の僅かな誤差が時間とともに拡大されるという予測不可能性に帰着されるものである。この初期値依存性を見積るものが、リヤプノフ指数である。具体的には、近接軌道間の距離 $d(t)$ が $d(t) = d(0) \exp[\lambda t]$ で表されるとき、 λ をリヤプノフ指数という。 λ は、一般には、系の自由度の数だけあり、それぞれの方向の安定性を記述している。相空間の軌道が不安定であるということは、少なくとも 1 つの方向のリヤプノフ指数が正であるということであり、 λ の中の最大のものを λ_1 とすれば $\lambda_1 > 0$ である。逆に、 $\lambda_1 > 0$ であることが、カオスの定義であるともいうことが出来る。

Fig. 1 に、自由度が 3 の場合のリヤプノフ指数の概略図を示す。3 次元の相空間内の軌道上の点 $\mathbf{X}(0)$ で、近接軌道が指数関数的に広がる方向に $\mathbf{d}_1(0)$ 、軌道方向に $\mathbf{d}_2(0)$ 、近接軌道が指数関数的に縮む方向に $\mathbf{d}_3(0)$ を取れば、 t 秒後には夫々、 $\mathbf{d}_1(t)$ 、 $\mathbf{d}_2(t)$ 、 $\mathbf{d}_3(t)$ となり、 $|\mathbf{d}_i(t)| = |\mathbf{d}_i(0)| \exp[\lambda_i t]$ ($i = 1, 2, 3$) より λ_i を決めることが出来る。 λ_i の組を大きい順に並べたもの、従ってこの場合 $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ をリヤプノフスペクトルといい、このスペクトルのタイプによりアトラクターを分類することが出来る。自由度が 3 の散逸系カオスの場合、散逸系であることから、 $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 < 0$ 、また、軌道の接線方向には伸びも縮みもしないから $\lambda_2 = 0$ 、そしてカオスであることから $\lambda_1 > 0$ となり、必ず $(+, 0, -)$ のタイプのリヤプノフ

スペクトルを持つことになる。リャプノフ指数のより厳密な取扱いについては 3-3 節で述べる。

2-3 フラクタル次元

2-3-1 フラクタルの概念

2-1 節に於いて、散逸系カオスが相空間にフラクタルな軌道（ストレンジアトラクター）を持つことを述べたが、ここでは、このフラクタルの概念と、それを定量化したフラクタル次元について述べる。

通常は、次元を考えると、点は 0 次元、直線は 1 次元、平面は 2 次元、空間は 3 次元、… というように、自由度の数で次元を決めている。ところが、この自由度の数を次元とする考え方に深刻な問題を提起したのがペアノ曲線のような、2 次元平面上の任意の点を、1 つの実数で表しうる曲線である¹³⁾。ペアノ曲線は Fig. 2 に示されるような図形の極限として定義され、自己相似的である。この図形は n 次元の空間にも適用でき、 n 次元の空間を自由度から考えて 1 次元と見なせるといふ矛盾が生じる。この問題を解決するために考え出された次元の定義の中に、図形の相似性に注目した相似性次元がある。この相似性次元は、ある図形が全体を $1/a$ に縮小した相似図形 a^{D_s} 個によって構成されているとき、この D_s によって次元を定義するのである。この定義によれば、Fig. 2 のようなペアノ曲線も 2 次元となり矛盾を生じない。ところが、この相似性次元 D_s は、 D_s の値が整数値であるときには経験的な次元と一致するが、先の定義は、 D_s が必ずしも整数値で

あるとは保証しないのである。この性質を具体的にみるためにカントール集合を考える。カントール集合というのは、Fig. 3 に示されているように、先ず線分 l を 3 等分し、中央を抜いて両端を残す。次に残った長さ $l/3$ の 2 つの線分に対して同じ操作を施す。この操作を無限に繰り返した極限の集合で定義する。この図形は、 $l/3$ に縮小した相似図形 2 個からなっている。従って、相似性次元 D_s は

$$D_s = \frac{\log 2}{\log 3} = 0.6309 \dots \quad (2.1)$$

となり非整数値を取る。この非整数値の次元がカントール集合の複雑さを定量的に表現しており、フラクタルとは、このような特徴的な長さを持たないような図形や構造、現象などの総称である¹³⁾。

さて、ここでの目的は、力学系の相空間の軌道のフラクタル性を見積ることであるから、厳密な相似性を持つ図形にしか定義できない相似性次元は適用できない。そこで、相似性次元の概念を拡張したフラクタル次元について、相空間の軌道の特徴づけるという観点から以下に述べる。

2-3-2 フラクタル次元

d 次元相空間に埋め込まれたストレンジアトラクターを考える。このアトラクター上に長時間の時系列点 $\{X_i\}_{i=1}^N$ を取る。ここで、相空間を一辺の長さが l の箱 (d 次元立方体) に分割し、軌道点 $\{X_i\}$ を含む箱の数を $M(l)$ 、 i 番目の箱の中に含まれる軌道点の数を n_i とすると

$$p_i = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{n_i}{N} \quad (2.2)$$

は、 i 番目の箱に軌道が訪れる確率を表す。Fig. 4 に $d=3$ の場合の概略図を示す。

このとき容量次元 D を

$$D = -\lim_{l \rightarrow 0} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\log M(l)}{\log l} \quad (2.3)$$

で定義する。

容量次元は、軌道点の存在する箱の数を計数するものであるから、軌道が頻りに訪れる箱もそうでない箱も同じものとして扱う。そこで、この軌道が箱を訪れる頻度を考慮したものに情報量次元 σ があり、以下のように定義する。

$$\sigma = -\lim_{l \rightarrow 0} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{S(l)}{\log l} \quad (2.4)$$

ここで

$$S(l) = -\sum_{i=1}^{M(l)} p_i \log p_i \quad (2.5)$$

は、情報量エントロピーで、アトラクター上の点を精度 l で探し出すのに必要な最小の情報量を表すことから、情報量次元と呼ばれる²⁾。

情報量次元 σ と同じように、滞在確率 p_i を考慮したものに、Grassberger と Procaccia²⁾ により提案された相関次元 ν があり、

$$\nu = \lim_{l \rightarrow 0} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\log \sum_{i=1}^{M(l)} p_i^2}{\log l} \quad (2.6)$$

で定義する。この相関次元 ν は、より扱いやすい別の形に変形出来、カオスの実験に於ける次元の測定を流行らせることになったのであるが、その形式については、3-2 節で述べる。

以上の3つの次元には、一般に、 $\nu \leq \sigma \leq D$ の関係が成り立ち、アトラクターが一様な場合 (p_i が i によらず全て等しいとき) に等号が成り立つ²⁾。

2-3-3 一般化次元

さて、相関次元では、(2.6)式にみるように、 p_i の2乗を取っており、従って2次の相関を考えていたが、アトラクターが一様でない場合、 q 次の相関も重要であると考えられる。この考え方を一般化することにより Hentschel と Procaccia は、無限個の次元が定義できることを示した¹⁴⁾。この無限個の次元のことを一般化次元 D_q といい

$$D_q = \lim_{l \rightarrow 0} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{q-1} \frac{\log \sum_{i=1}^{M(l)} p_i^q}{\log l} \quad (2.7)$$

で定義する。この D_q に関しては、 $q' > q$ ならば $D_{q'} \leq D_q$ であり、アトラクターが一様な場合に等号が成り立つ。また $D_0 = D$ 、 $D_1 = \sigma$ 、 $D_2 = \nu$ であることは容易に示すことが出来る。

q の値は $-\infty$ から $+\infty$ まで変えられるが、この D_q によって、アトラクターのフラクタル構造を完全に記述できることは重要である。

2-4 $f(\alpha)$ スペクトル

$f(\alpha)$ スペクトルは、Halsey ら³⁾によって提案された概念で、フラクタル集合上の規格化された分布(測度)を記述するものである。すなわち、測度の特異性を考慮してスケーリング特性を考えるもので、特異性の強さを決める α と、 α の分布の密度をあらわす f によって記述される。具体的には以下のように定義される。

2-3-2節で定義したように、 d 次元相空間の分割を考える。このとき(2.2)式で定義される i 番目の箱の滞在確率 p_i は、箱の一辺の長さ l に関して

$$p_i \sim l^{\alpha_i} \quad (2.8)$$

の依存性を持つものと考えられる。均一なフラクタルであれば α_i は i によらないが、一般には α_i は一様であるとは限らないので、 α_i の値が場所により変化しているとする。そこで逆に α の値が $\alpha' \sim \alpha' + d\alpha'$ の間の値をとる箱の数を考えると、その個数 $N(\alpha')d\alpha'$ は、

$$N(\alpha')d\alpha' \sim d\alpha' \rho(\alpha') l^{-f(\alpha')} \quad (2.9)$$

の形で表せる。この $f(\alpha')$ が $f(\alpha)$ スペクトルであるが、これは α の値が $\alpha' \sim \alpha' + d\alpha'$ である箱の集合の容量次元を表している。さて、この $f(\alpha)$ は以下の手順によって一般化次元 D_q と関係づけられることが分かる。

2-3-3節で定義された一般化次元 D_q は

$$D_q = \lim_{l \rightarrow 0} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{q-1} \frac{\log \chi(q)}{\log l} \quad (2.10)$$

$$\chi(q) = \sum_{i=1}^{M(l)} p_i^q \quad (2.11)$$

である。(2.11)式に(2.8)式と(2.9)式を代入して

$$\chi(q) = \int d\alpha' \rho(\alpha') l^{-f(\alpha')} l^{q\alpha'} \quad (2.12)$$

を得る。 $l \rightarrow 0$ の極限で(2.12)式の積分に最も寄与するのは、 $q\alpha' - f(\alpha')$ が最小になる場合であり、そのような α' の値は q に依存するから、 $\alpha(q)$ と置き、

(2·12) 式は

$$\chi(q) \sim \rho(\alpha(q)) [q\alpha(q) - f(\alpha(q))] \quad (2 \cdot 13)$$

で近似できる。このとき極小条件

$$\left. \frac{d}{d\alpha'} [q\alpha' - f(\alpha')] \right|_{\alpha'=\alpha(q)} = 0 \quad (2 \cdot 14)$$

$$\left. \frac{d^2}{d(\alpha')^2} [q\alpha' - f(\alpha')] \right|_{\alpha'=\alpha(q)} > 0 \quad (2 \cdot 15)$$

から

$$\frac{df(\alpha(q))}{d\alpha} = q \quad (2 \cdot 16)$$

$$\frac{d^2 f(\alpha(q))}{d^2 \alpha} < 0 \quad (2 \cdot 17)$$

を得る。(2·13) 式を (2·10) 式に代入して

$$D_q = \frac{1}{q-1} [q\alpha(q) - f(\alpha(q))] \quad (2 \cdot 18)$$

が得られる。また (2·18) 式から

$$\alpha(q) = \frac{d}{d\alpha} [(q-1)D_q] \quad (2 \cdot 19)$$

$$f(\alpha(q)) = q\alpha(q) - (q-1)D_q \quad (2 \cdot 20)$$

が得られ、 D_q より $f(\alpha)$ を求めることが出来る。

3-1 アトラクターの再構成

第二章で述べたように、散逸系カオスは相空間の軌道（ストレンジアトラクター）で特徴づけられるから、その特性を引き出すためには、相空間の軌道を扱わなければならない。しかし、実験では観測量は1変数である場合が多く、従って、1変数から多次元相空間の軌道を再構成する必要がある。それには、Takens¹⁵⁾によって提案された以下の手法で行う。

Δt のサンプリング時間で観測した時系列を $y(i \Delta t)$ として $\{x_i \equiv y(i \Delta t)\}_{i=1}^N$ とする。この時系列 x_i から d 次元のベクトルを作るには、適当な時間遅れ $t_d = m \Delta t$ を取って、

$$\mathbf{X}_i = (x_i, x_{i+m}, \dots, x_{i+(d-1)m}) \quad (3.1)$$

とすればよい。この方法を埋め込みといい、 d を埋め込み次元という。Fig. 5 に、埋め込みによる相空間の軌道の再構成の概略図を示す。より具体的にみるために、カオスを示す2次元写象の1つの Hénon map について、埋め込みの方法を用いる。Hénon map は

$$\left. \begin{aligned} X_n &= Y_n + 1 + aX_n^2 \\ Y_n &= bX_n \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

で表され、ここでは $a=1.4$, $b=0.3$ にとった。Fig. 6 は、2次元相空間のアトラクターを、 (X_n, Y_n) と (X_n, X_{n+1}) でプロットしたものである。 $(n=1 \sim 2000)$ 2つのアトラクターは、向きは違うが、トポロジーは等しいことが分かる。1変数

の時系列から多次元の相空間の軌道を再構成できることが、以下の解析を容易にしている。

3-2 相関次元

二章で定義したフラクタル次元は、どれも d 次元の相空間を一辺が l の箱で分割することを考えている。しかし、この方法が実際使えるのは d が小さい場合だけで、 d が大きくなると、箱の数が大きくなりすぎてほとんど計算不可能になる。この問題を克服するために Grassberger と Procaccia²⁾ によって考え出されたのが、先に述べた相関次元であるが、(2.6) 式とは異なる形式で定義される。

2-3-2 節で定義したように、相空間の軌道の上に N 個の点 $\{X_i\}_{i=1}^N$ を取る。このとき、相関積分を

$$C(r) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ (i \neq j)}}^N \theta(r - |X_i - X_j|) \quad (3.3)$$

で定義する。ここで、 $\theta(x)$ はヘビサイドの階段関数で

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \quad (3.4)$$

である。そしてこの相関積分 $C(r)$ は r の小さいところで

$$C(r) \propto r^\nu \quad (3.5)$$

の関係を満たす。このときの ν の値が相関次元である。(3.3) 式は、観測した全ての点に対して 2 点間の距離を測ると、その累積分布関数として $C(r)$ が求まること

を示しており、箱の数を計数するアルゴリズムに比べて計算が容易である。(3・3)

式と(2・6)式との関係については、以下の評価を行うことにより示される¹⁶⁾。

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{M(l)} p_i^2 &\equiv \text{一辺の長さ } l \text{ の箱にアトラクター上の2点が入る確率} \\ &\simeq \text{アトラクター上の2点の距離が } l \text{ 以下となる確率} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^2} \{ |\mathbf{X}_i - \mathbf{X}_j| < l \text{ を満たす組 } (i, j) \text{ の数} \} \\ &\equiv C(l) \end{aligned}$$

実際にどのようにして ν が求まるかを示すために、正弦曲線、正規乱数、そして(3・2)式で定義される Hénon map について 2000 点のデータで相関次元を評価した。Fig. 7 に正弦曲線についての計算結果を示す。(a) は埋め込み次元 d を 1 から 10 まで変化させた場合のスケール r と $C(r)$ を両対数でプロットしたものである。上の曲線から下の曲線へと d は増加している。スケール r に対する $C(r)$ のべき則が r の広い範囲に対して確認される。曲線の夫々の傾きを d に対してプロットしたのが (b) である。 d が上がるにつれ傾きの値が 1 に飽和していることが分かる。このことは正弦曲線が 1 次元であることと一致する。ここで埋め込みの際の時間遅れ t_d は周期の $1/4$ に取った。Fig. 8 に正規乱数の場合の同様の計算結果を示す。Fig. 8(b) から分かるように、埋め込み次元 d を上げていくと、傾きはほぼ比例して大きくなっている。これは乱数の自由度がきわめて大きいことに対応している。理想的には、 ν は埋め込み次元 d に一致するはずであるが、計算結果は $\nu = d$ から逸脱している。このずれは、乱数が完全な白色ノイズではないことと、データ数が少ないことによるものと考えられる。しかしこれは逆に、 $\nu = d$ が成り立つ

$d = 4$ までの次元の評価の妥当性を示していると考えられる。Hénon map についての計算結果を Fig. 9 に示す。(b) より $\nu = 1.22$ を得た。これは Hénon map のアトラクターの持つフラクタル性を記述している。

3-3 リャブノフ指数

リャブノフ指数を実験のデータからどの様にして求めるかについて述べる前に、理論的計算方法について述べる。

Shimada と Nagashima は、力学方程式からリャブノフ指数を計算する方法について以下のように提案している¹⁷⁾。

n 次元のユークリッド空間で力学系が

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}) \quad (\mathbf{x} \in R^n) \quad (3 \cdot 6)$$

で記述されている場合を考える。初期条件 $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ の (3・6) 式の解は

$$\mathbf{x}(t) = T^t \mathbf{x}_0 \quad (3 \cdot 7)$$

と書ける。ここで、 T^t は相空間の全ての点の時間 t の時間発展を記述する写像である。一方、軌道からの微小なずれを記述する方程式は

$$\delta \dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{x}}(T^t \mathbf{x}_0) \delta \mathbf{x} \quad (3 \cdot 8)$$

である。(3・8) 式の解は

$$\delta \mathbf{x}(t) = U_{\mathbf{x}_0}^t \delta \mathbf{x}_0 \quad (3 \cdot 9)$$

である。\$U_{x_0}^t\$ は \$n \times n\$ の行列で \$\delta x_0\$ は \$t=0\$ での初期のずれである。\$U_{x_0}^t\$ は次の規則をみたす。

$$U_{x_0}^{t+s} = U_{x_0}^t U_{x_0}^s \quad (3 \cdot 10)$$

微小なずれの漸近的な振舞いは、\$t \to \infty\$ での \$U_{x_0}^t\$ で記述できる。\$t \to \infty\$ での \$U_{x_0}^t\$ の振舞いは

$$\lambda(e^k, x_0) = \lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{|U_{x_0}^t e_1 \wedge U_{x_0}^t e_2 \wedge \cdots \wedge U_{x_0}^t e_k|}{|e_1 \wedge e_2 \wedge \cdots \wedge e_k|} \quad (3 \cdot 11)$$

で記述する。ここで \$e^k\$ は、\$x_0\$ に於ける接空間の \$k\$ 次元部分空間であり、\$\{e_i\}_{i=1}^k\$ は \$e^k\$ の基底である。また \$\wedge\$ は外積である。(3・11) 式で定義される \$\lambda(e^k, x_0)\$ は、\$x_0\$ を始点とした接空間の \$k\$ 次元平行多面体の体積の軌道に沿った拡大率を表す。したがって \$k\$ 次元リャプノフ指数と呼ばれる。\$\lambda(e^k, x_0)\$ は、部分空間 \$e^k\$ に依存し \$e^k\$ の基底 \$\{e_i\}\$ の選び方には依らない。さて (3・11) 式の定義では指数関数的に拡大する解に対しては、計算機のオーバーフローの問題がある。この問題を避けるために、適当な時間発展 \$\tau\$ ごとに基底を変更する。そして、グラム・シュミットの直交化により新しい正規直交基底系を求める。すなわち \$j\$ ステップ後 (\$t = j\tau\$ 後) の基底を \$\{e_i^j\}\$ とすれば、\$j+1\$ ステップ後の基底は

$$\begin{aligned} e_1^{j+1} &= \frac{U_{x_0}^\tau e_1^j}{|U_{x_0}^\tau e_1^j|} \\ e_2^{j+1} &= \frac{U_{x_0}^\tau e_2^j - (e_1^{j+1} \cdot U_{x_0}^\tau e_2^j) \cdot e_1^{j+1}}{|U_{x_0}^\tau e_2^j - (e_1^{j+1} \cdot U_{x_0}^\tau e_2^j) \cdot e_1^{j+1}|} \\ &\vdots \\ e_k^{j+1} &= \frac{U_{x_0}^\tau e_k^j - (e_1^{j+1} \cdot U_{x_0}^\tau e_k^j) \cdot e_1^{j+1} \cdots - (e_{k-1}^{j+1} \cdot U_{x_0}^\tau e_k^j) \cdot e_{k-1}^{j+1}}{|U_{x_0}^\tau e_k^j - (e_1^{j+1} \cdot U_{x_0}^\tau e_k^j) \cdot e_1^{j+1} \cdots - (e_{k-1}^{j+1} \cdot U_{x_0}^\tau e_k^j) \cdot e_{k-1}^{j+1}|} \quad (3 \cdot 12) \end{aligned}$$

従って

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{|\Lambda_i U_{x_0}^t e_i|}{|\Lambda_i e_i|} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n\tau} \ln \frac{|\Lambda_i U_{x_0}^{n\tau} e_i^0|}{|\Lambda_i e_i^0|} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n\tau} \ln \sum_{j=0}^{n-1} \frac{|\Lambda_i U_{x_j}^{\tau} e_i^j|}{|\Lambda_i e_i^j|} \end{aligned} \quad (3 \cdot 13)$$

となる。さらに近似式

$$U_{x_j}^{\tau} e_i^j \simeq T^{\tau}(x_j + e_i^j) - T^{\tau} x_j \quad (3 \cdot 14)$$

を使うと、(3・11)式は

$$\lambda(e^t, x_0) \simeq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n\tau} \sum_{j=0}^{n-1} \ln \frac{|\Lambda_i (T^{\tau}(x_j + e_i^j) - T^{\tau} x_j)|}{|\Lambda_i e_i^j|} \quad (3 \cdot 15)$$

となる。

さて、力学方程式が分かっているときには、(3・15)式を用いて数値計算することによりリャプノフ指数を求められるが、実験データの場合にはそのままは使えない。そこで、Wolfら¹⁸⁾は Shimadaらの方法を実験データに適用し最大リャプノフ指数を求める方法を提案している。また、Sanoら¹⁹⁾は実験データから直接 $U_{x_0}^t$ を求め、 $U_{x_0}^t$ の固有値からリャプノフスペクトルを求める方法を提案している。しかし、いずれの場合もアトラクターの次元が高い場合には困難であり問題がある。これに対して、Satoら²⁰⁾は次元が高い場合にも比較的容易に最大リャプノフ指数を計算できる方法を提案しているので、以下にその方法について述べる。

アトラクター上の2点の距離を $\text{dis}(x, y)$ で表し、系の流れを f^t で表す。もし y を x に最も近い点に選ぶと、 $f^t y$ は時間 t の増大にともなって最も不安定な

方向に近づくと考える。従って

$$\lambda(t) = \frac{1}{t} \left\langle \ln \frac{\text{dis}(f^t \mathbf{x}, f^t \mathbf{y})}{\text{dis}(\mathbf{x}, \mathbf{y})} \right\rangle \quad (3 \cdot 16)$$

は適当な t を取ることによって最大リャプノフ指数に近づく。ここで $\langle \rangle$ は \mathbf{x} に関するアンサンブル平均である。しかし (3·16) 式は \mathbf{y} と、 \mathbf{x} の不安定な方向との食い違いにより誤差を生じ、また $\text{dis}(f^t \mathbf{x}, f^t \mathbf{y})$ がアトラクターの大きさ以上に大きくなれないために、 t を増やすことによって収束するとは限らない。そこで (3·16) 式と等価な

$$\lambda(t, \tau) = \frac{1}{\tau} \langle \ln \Lambda(t, \tau) \rangle \quad (3 \cdot 17)$$

$$\Lambda(t, \tau) = \frac{\text{dis}(f^{t+\tau} \mathbf{x}, f^{t+\tau} \mathbf{y})}{\text{dis}(f^t \mathbf{x}, f^t \mathbf{y})} \quad (3 \cdot 18)$$

を定義する。この (3·17) 式で定義される λ の値は、(3·16) 式で定義される λ に比べてすばやく収束することが Sato らによって示された²⁰⁾。この方法を用いて正弦曲線、正規乱数、及び Hénon map について計算した結果をそれぞれ Fig. 10 の (a)、(b)、(c) に示す。正弦曲線は 1 次元の保存系であるから $\lambda = 0$ 、また乱数も $\lambda = 0$ である。Hénon map の場合 $t=3 \sim 7$ の平らな部分は埋め込み次元を上げると収束して $d=4$ で $\lambda=0.42$ を得た。

3-4 一般化次元と $f(\alpha)$ スペクトル

2-4節で述べたように、一般化次元と $f(\alpha)$ スペクトルとの間には (2.19) 式、(2.20) 式で関係づけられている。従って $f(\alpha)$ スペクトルを求めるには一般化次元 D_q を求めればよいが、 D_q は (2.7) 式で定義されているように相空間の分割を考えねばならず、実際的な計算は困難である。本研究では、3-2節で述べた相関次元を計算するアルゴリズムを拡張した Sato ら²⁰⁾ の計算方法を採用した。Sato らの方法は以下の通りである。

d 次元相空間の軌道上の N 個の時系列 $\{\mathbf{X}_i\}_{i=1}^N$ を考える。この相空間を一辺の長さ l の箱で分割し、 i 番目の箱の中の軌道点の数を n_i とする。 $p_i = n_i/N$ は N が十分大きいときアトラクターの不変確率測度を与える。このとき軌道点 \mathbf{X}_i に関して、個別相関関数を

$$C_{\mathbf{X}_i}(r) = \frac{1}{N} \sum_j^N \theta(r - |\mathbf{X}_j - \mathbf{X}_i|) \quad (3.19)$$

で定義する。そして

$$\left[\prod_{k=1}^{n_i} C_{\mathbf{Z}_{i,k}}(r) \right]^{\frac{1}{n_i}} = C_{\mathbf{Z}_i}(r) \quad (3.20)$$

を仮定する。ここで \mathbf{Z}_i は、 i 番目の箱の中心の点で、 $\mathbf{Z}_{i,k}$ は、 i 番目の箱の中にある点である。(3.19) 式は、 i 番目の箱の中心点に置ける個別相関関数が、箱の中の全ての点の個別相関関数の幾何平均であることを意味している。従って

$$\{C_{\mathbf{Z}_i}(r)\}^q = \left[\prod_{k=1}^{n_i} C_{\mathbf{Z}_{i,k}}(r)^q \right]^{\frac{1}{n_i}} \leq \frac{1}{n_i} \sum_{k=1}^{n_i} C_{\mathbf{Z}_{i,k}}(r)^q \quad (3.21)$$

が成り立つ。 r が十分に小さければ

$$\begin{aligned}
 \sum_i p_i^q &\simeq \sum_i p_i C_{\mathbf{Z}_i}(r)^{q-1} \\
 &\leq \sum_i \frac{n_i}{N} \frac{1}{n_i} \sum_{k=1}^{n_i} C_{\mathbf{Z}_{i,k}}(r)^{q-1} \\
 &= \frac{1}{N} \sum_m C_{\mathbf{Z}_m}(r)^{q-1}
 \end{aligned} \tag{3.22}$$

従って

$$\nu_q = \frac{1}{q-1} \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\ln \langle C_{\mathbf{Z}}(r)^{q-1} \rangle}{\ln r} \tag{3.23}$$

を得る。(3.22) 式は D_q の上界を与えるが、多くの場合 ν_q が D_q の良い近似となると考える。 $q=1$ の場合は

$$\nu_1 = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\langle \ln C_{\mathbf{Z}}(r) \rangle}{\ln r} \tag{3.24}$$

である。この方法を用いて Hénon map について D_0 と D_1 を計算した結果を Fig. 11 に示す。 $D_0=1.29$, $D_1=1.26$ を得た。

この様にして D_q が求まると (2.19), (2.20) 式を用いて $f(\alpha)$ スペクトルを計算することが出来る。

参考文献

- 1) M. J. Feigenbaum, *J. Stat. Phys.*, **19**, 25(1978); **21**, 669(1979).
- 2) P. Grassberger and I. Procaccia, *Phys. Rev. Lett.*, **50**, 346(1983);
Physica, **9D**, 189(1983).
- 3) T. C. Halsey, M. H. Jensen, L. P. Kadanoff, I. Procaccia and
B. I. Shraiman, *Phys. Rev.*, **A33**, 1141(1986).
- 4) M. H. Jensen, L. P. Kadanoff, A. Libchaber, I. Procaccia and
J. Stavans, *Phys. Rev. Lett.*, **55**, 2798(1985).
- 5) R. W. Boswell, *Plasma Physics and Controlled Fusion*, **27**, 405(1985).
- 6) 大野哲靖 柏谷俊郎 田中雅慶 小森彰夫 河合良信
九州大学総合理工学研究科報告 **9**, 23(1987).
- 7) P. Y. Cheung and A. Y. Wong, *Phys. Rev. Lett.*, **59**, 551(1987).
- 8) P. Y. Cheung, S. Donovan and A. Y. Wong, *Phys. Rev. Lett.*, **61**,
1360(1988).
- 9) N. Ohno, M. Tanaka, A. Komori and Y. Kawai, *J. Phys. Soc. Jpn.*, **58**,
28(1989).
- 10) H. J. Barkley, J. Andreoletti, F. Gervais, J. Olivain, A. Quemeneur
and A. Truc, *Plasma Physics and Controlled Fusion*, **30**, 217(1988).
- 11) 長島弘幸、*日本物理学会誌* **41**, 19(1986).

- 12) 佐野雅己、「第3章 カオスの構造とフラクタル」 フラクタル科学
高安秀樹 編著 (朝倉書店, 1987), p58.
- 13) 高安秀樹、フラクタル (朝倉書店, 1986) .
- 14) H. G. E. Hentschel and I. Procaccia, *Physica*, **8D**, 435(1983).
- 15) F. Takens, in *Dynamical Systems and Turblence*, Vol. 898 of
Lecture Notes in Mathematics, edited by D. A. Rand and
L. S. Young (Springer, Berlin, 1981), 366.
- 16) C. W. Sim, M. L. Sawley, F. Skiff and A. Pochelon, *Res. Rep. of LRP*,
293/86(1986).
- 17) I. Shimada and T. Nagashima, *Prog. Theor. Phys.*, **61**, 1605(1979).
- 18) A. Wolf, J. B. Swift, H. L. Swinney and J. A. Vastano, *Physica*, **16D**,
285(1985).
- 19) M. Sano and Y. Sawada, *Phys. Rev. Lett.*, **55**, 1082(1985).
- 20) S. Sato, M. Sano and Y. Sawada, *Prog. Theor. Phys.*, **77**, 1(1987).

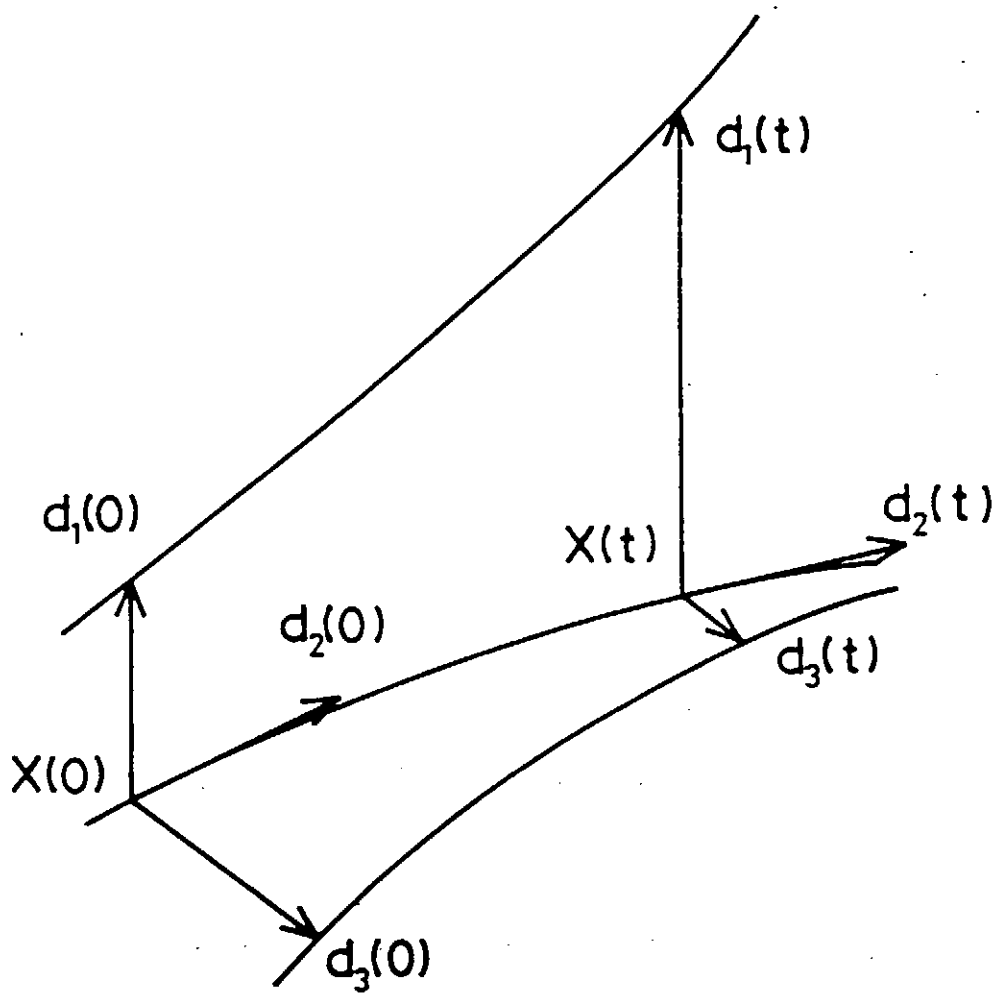


Fig. 1. リヤプノフ指数の概略図

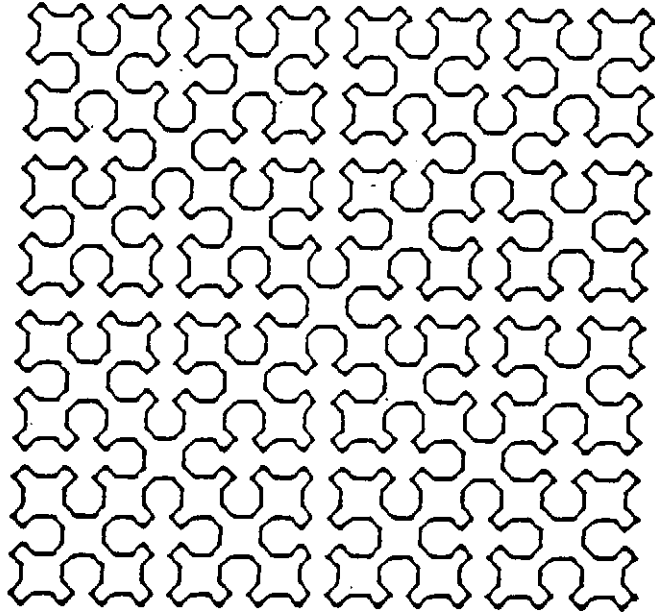


Fig. 2. ペアノ曲線

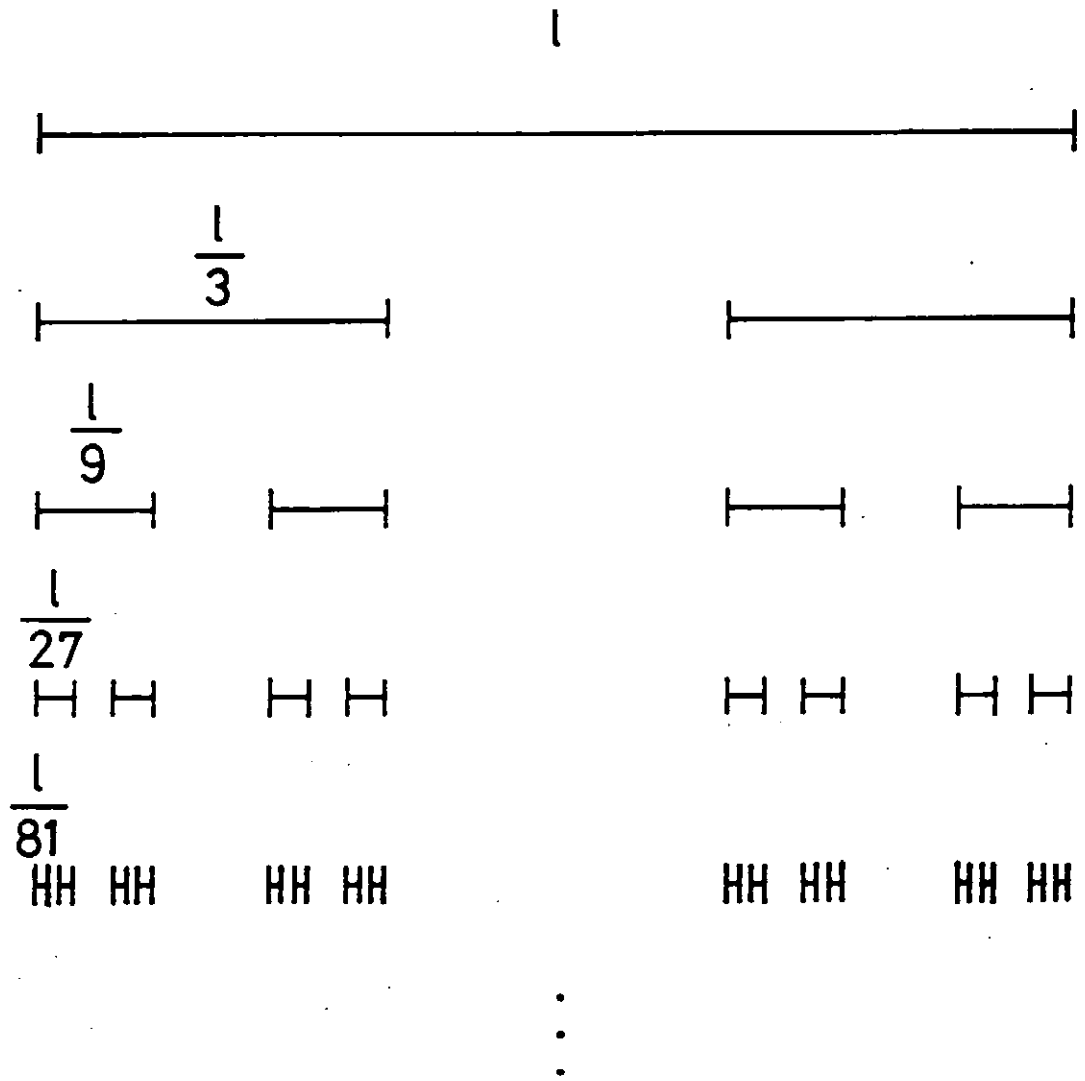


Fig. 3. カントール集合

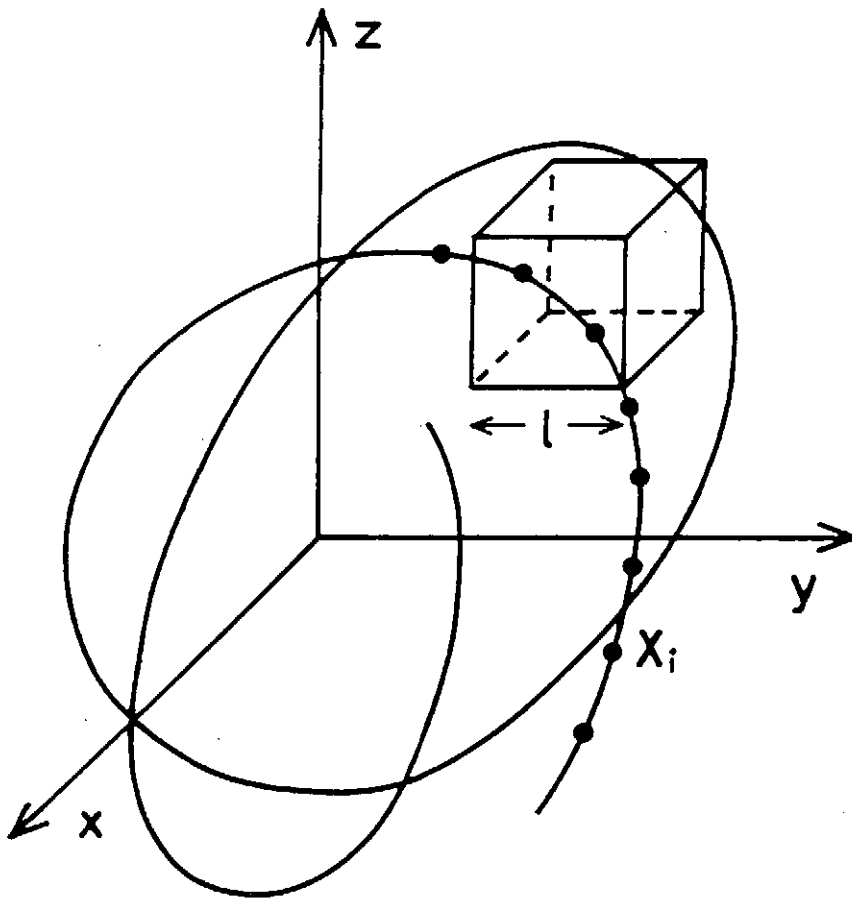


Fig. 4. 相空間の分割の概略図

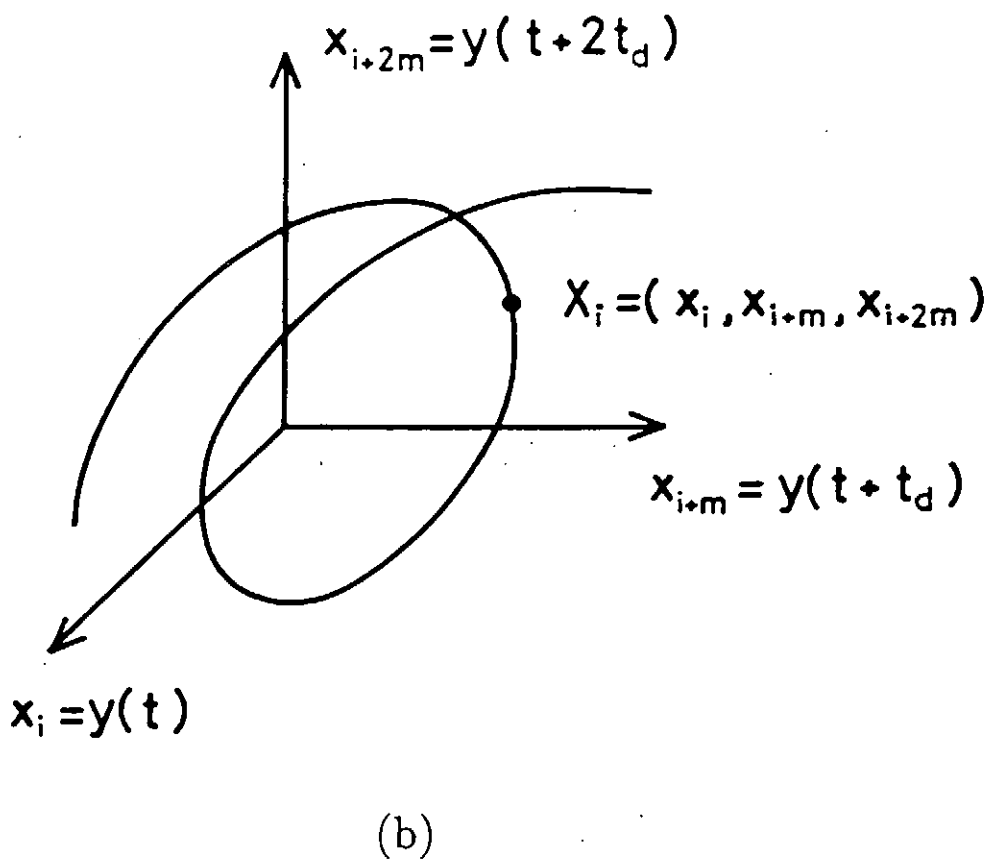
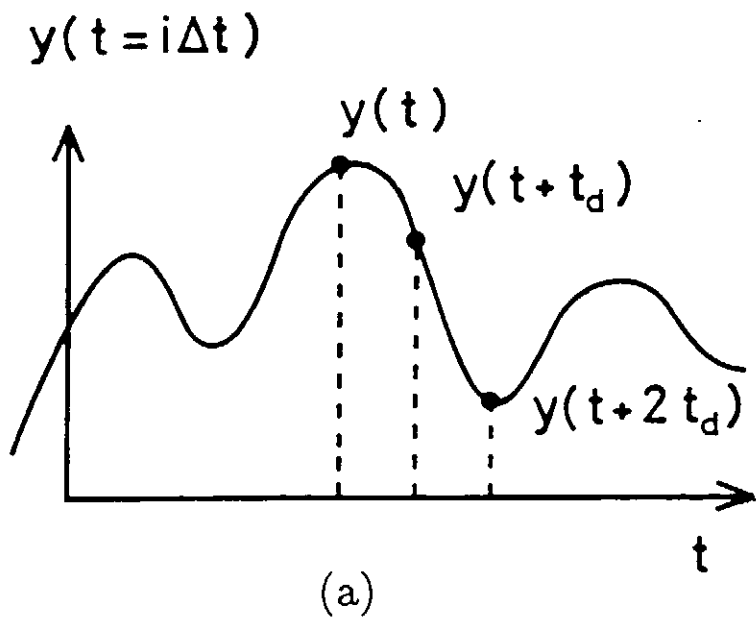
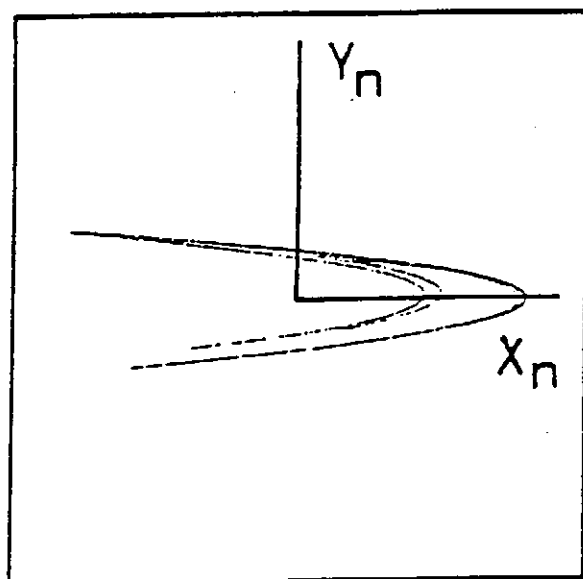
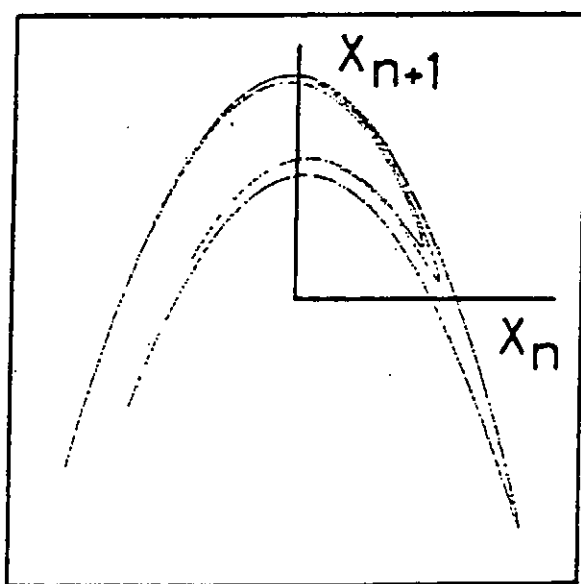


Fig. 5. 埋め込みの方法の概略図

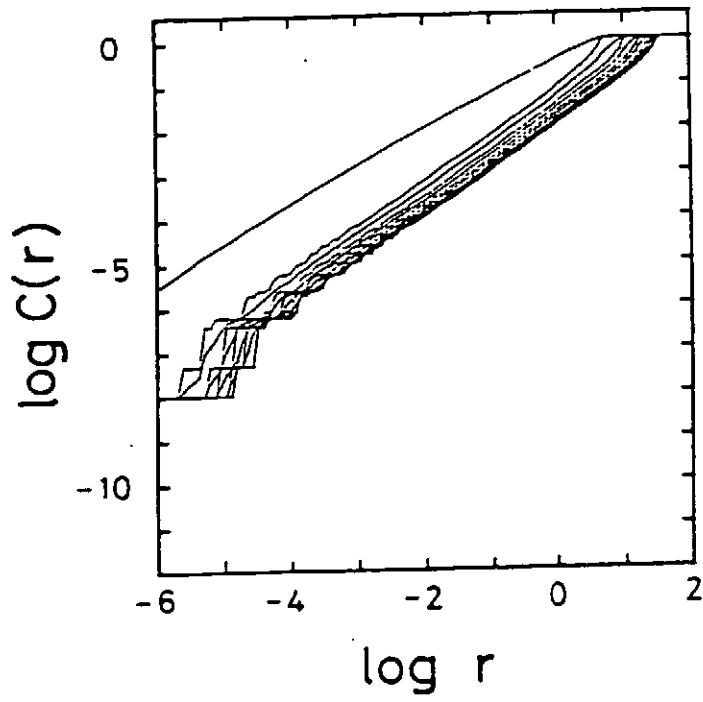


(a)

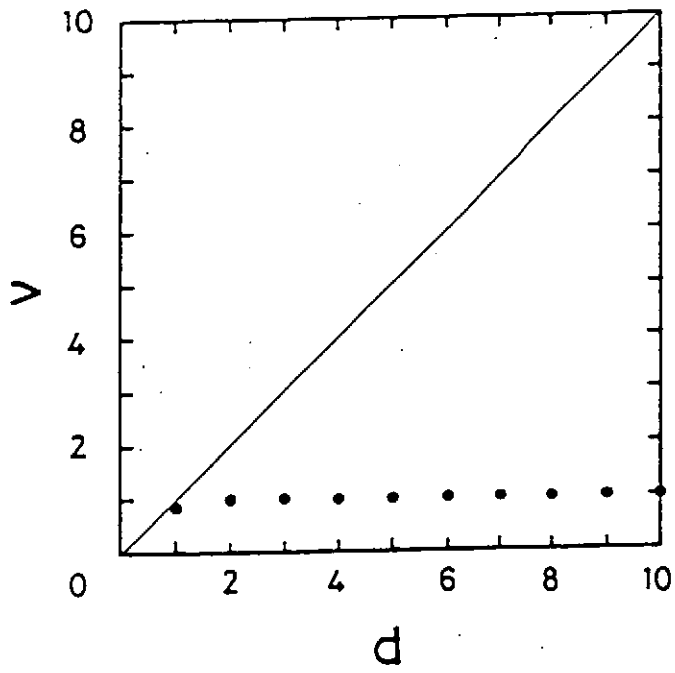


(b)

Fig. 6. Hénon map のアトラクター
 (b) は 1 変数 $\{X_n\}$ から再構成したアトラクター

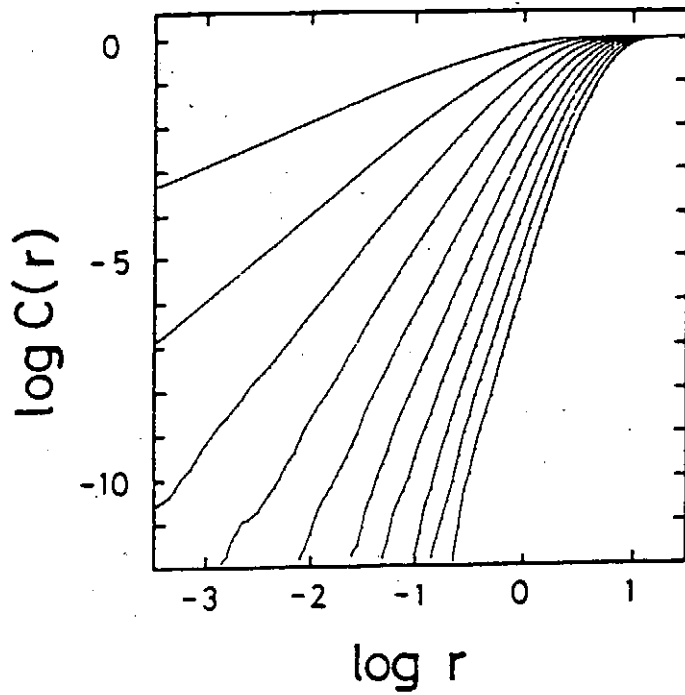


(a)

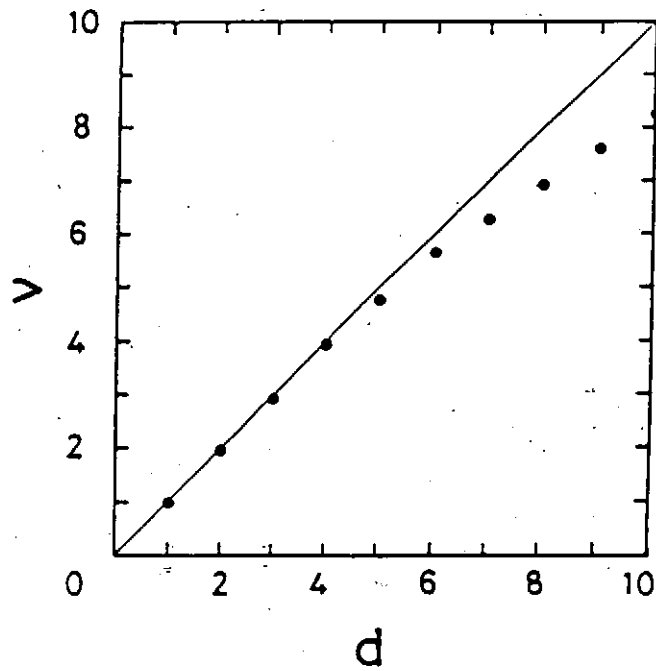


(b)

Fig. 7. 正弦曲線の相関次元



(a)



(b)

Fig. 8. 正規乱数の相関次元

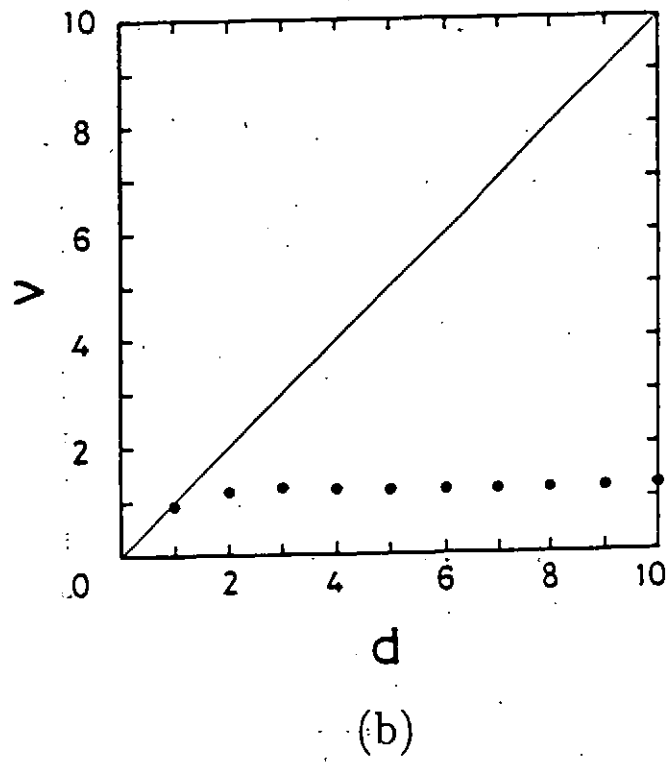
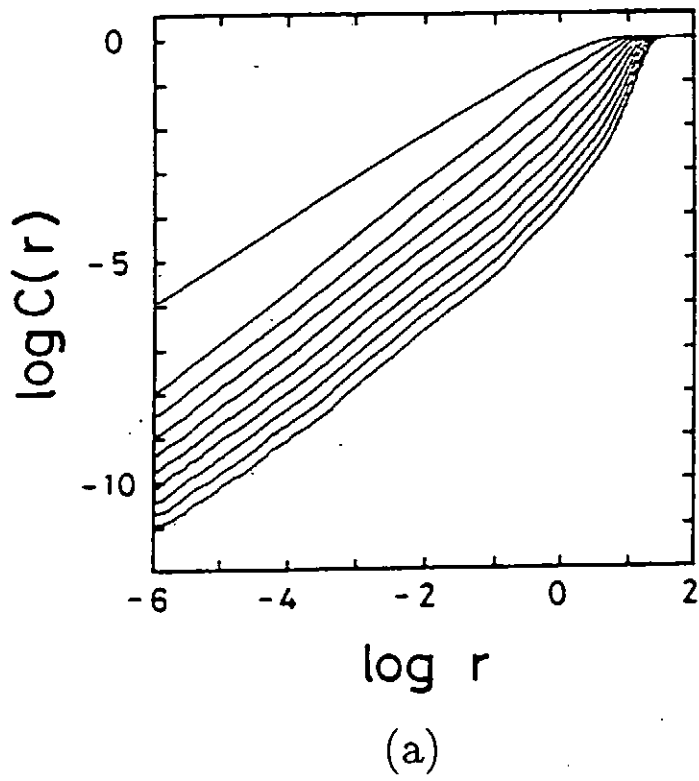
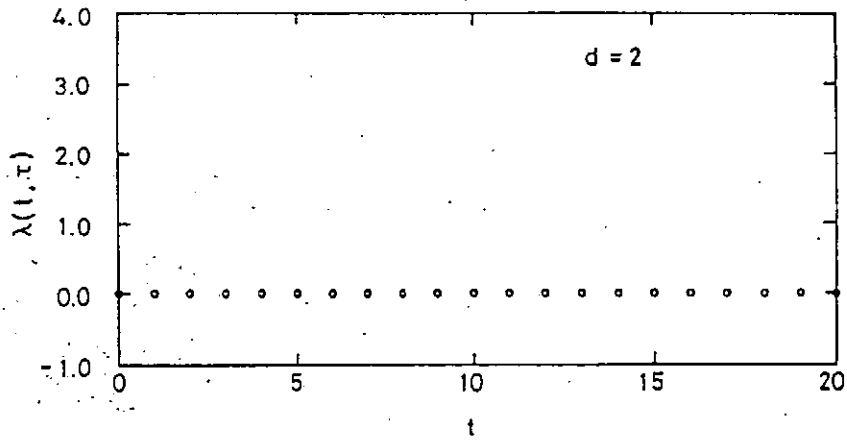
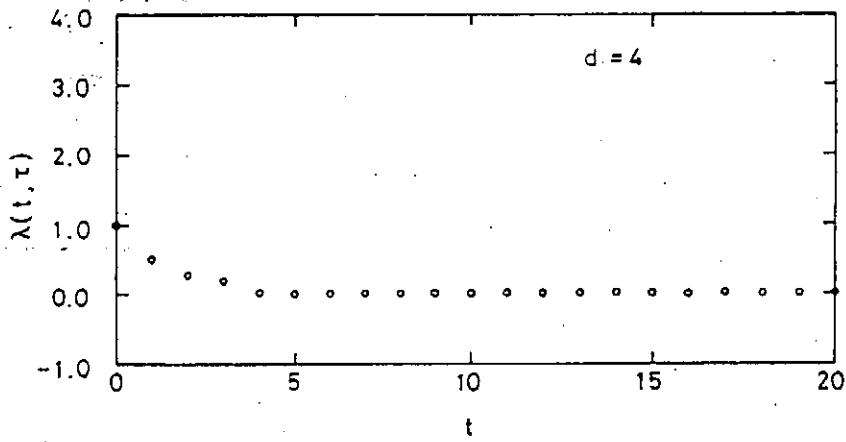


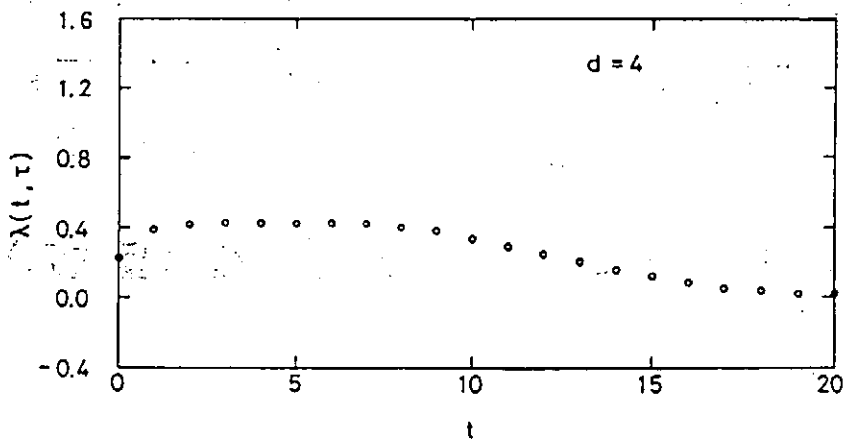
Fig. 9: Hénon map の相関次元



(a) 正弦曲線

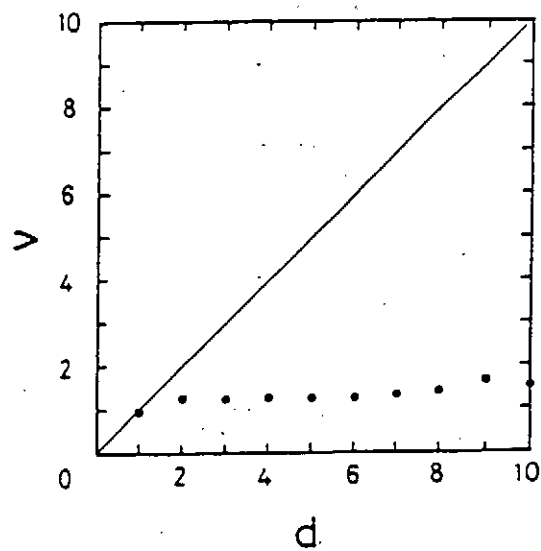
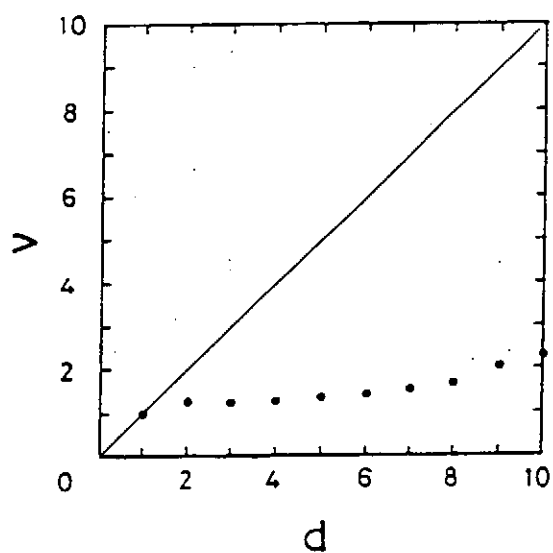
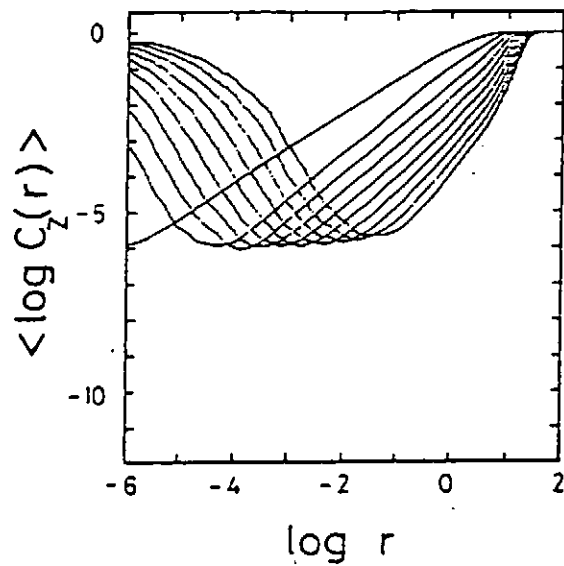
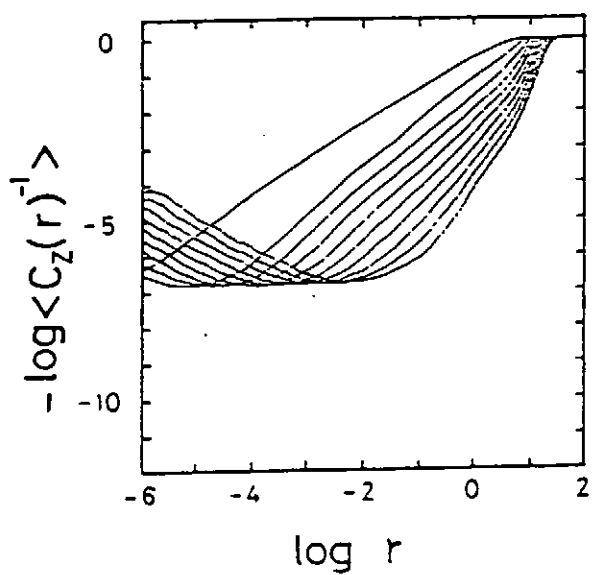


(b) 正規乱数



(c) Hénon map

Fig. 10. 最大リヤプノフ指数の計算



(a) D_0 (容量次元) の計算

(b) D_1 (情報量次元) の計算

Fig. 11. Hénon map の D_0 と D_1 の計算

プラズマ中のカオス現象

----- 基礎実験 -----

名古屋大学工学部 大野哲靖

1. はじめに

カオスは1974年にMayにより見いだされからり、現在まで様々な物理分野に共通した現象として盛んに研究が行われてきた。当初はLiとYorkの研究に代表されるように理論研究が主であったが²⁾、1979年にFeigenbaumにより実験的に観測可能なカオスの普遍定数が発見されたのを契機に様々な分野で実験研究が行われるようになった³⁾。これまでカオスを示す物理系として、非線形電気回路、強制振子、流体力学、非線形光学系、化学反応系などが報告されている^{4) - 7)}。研究対象である物理系が次第に複雑になっているのが特徴であり、プラズマは多様な現象を内在しており複雑な系の代表と言える。

実験の立場からカオスの定義を考えてみよう。カオスの定義とは

- (1) 力学系（保存系、散逸系を含めて）の解が不規則に振舞うこと
- (2) 解の相空間での軌道が不安定であること

である。(1)は実験的にはパワースペクトラムが連続成分を持つことにより分る。しかし、このような連続スペクトルは外部雑音や系の自由度が無限大である場合にも現れる。特にプラズマの場合、乱流現象を始め本質的には無限自由度の系であり、尚かつ実験ではバックグラウンドに必ず雑音成分が存在するため、連続スペクトルが系の非線形性により発生したものであり、外部雑音や系の無限自由度によるものではないことを判別することが重要である。(2)に関しては相空間の近接軌道の時間経過による広がり調べる必要がある。しかし、実験で得られるのは一次元の時系列データであるのがほとんどであり、そこから上記の判定をする情報を得る必要がある。そのために理論的に以下に示すカオス解析のための手法が考えられた。

- (1) 一次元時系列データからの相空間の再構成
- (2) 相関次元
- (3) リアプノフ指数
- (4) 一般化次元と $f(\alpha)$ スペクトラム

(1)はTakensにより見いだされた方法で一次元時系列データ上で適当な時間遅れをとることによって位相空間を再構成できるものである⁸⁾。(2) - (4)は再構成された位相空間の構造から導き出される量であり、それらを求めるために様々なアルゴリズムが提案されている^{9) - 14)}。例えば、連続スペクトルが観測された場合、相関次元を時系列データから求めることにより系の自由度の大きさを決定でき、それが外部雑音もしくは系が無限自由度であることによるものか、それともカオス現象であるかを区別することができる。また、カオスの定義である解の相空間での軌跡が不安定であることは(3)のリアプノフ指数が正であることに対応する。しかし実際実験でリアプノフ指数を求めるにはかなり長時間の時系列データが必要である。以上のような解析

は単発的にプラズマ中で乱れた現象が観測されたときそれがカオスであるかどうか調べるのに極めて有効である。現在、核融合プラズマの周辺部の揺動を始め、さまざまなプラズマ中の揺動に対して解析が行われている所である。

一方、観測される現象が外部より実験的に制御可能なパラメータ（例えば、放電の場合、電圧、電流など）で変化する場合、カオスへの遷移を調べることもできる。カオスへ至る遷移の代表的な例としては、

- (1) 周期倍化分岐からのカオス
- (2) 間欠性カオス
- (3) 準周期運動からのカオス

が挙げられる。前に述べたFeigenbaumの普遍定数は(1)の遷移において見いだされたものである。他の分野と同じく、プラズマの基礎実験でも上記のような遷移の観測例が幾つか報告されている。以下具体的な報告について幾つか紹介する。

2. プラズマ基礎実験でのカオス

始めて、プラズマの基礎実験でカオス現象の検証を目的としたのはBoswellの電子ビーム系の実験である¹⁵⁾。実験装置の概略図を図1(a)に示す。プラズマは乾燥空気中(6×10^{-6} Torr)に電子銃により電子ビームを入射し生成する。このとき電子ビームの存在で発生した径方向の強い電場により、周波数がイオンプラズマ周波数程度の不安定性(Kelvin-Helmholtz不安定性)が自然励起される。電子ビームの電流値を上げて行くと図1(b)に示されているように約 $20 \mu\text{A}$ で周期倍化を起し2周期振動が励起される。更にビーム電流を大きくするとカオス状態を経た後、3周期振動が観測された。また30分後に同じ実験を行ったところ周期倍化は起こらなかったと報告されており、この再現性の悪さはカオスの初期値依存性の強さに対応していると結論づけられている。この実験では、周期倍化が2周期までしか観測されておらずFeigenbaum定数も得られていないが、カオスを研究対象とした最初のプラズマ基礎実験として意義あるものと言えよう。その後、放電現象に関連した分岐現象がCheungとWongにより報告された¹⁶⁾。熱陰極にタングステンフィラメント用い、陰極と陽極間にパルスの放電電圧(パルス幅2~3 msec)を印加しプラズマを生成する。このとき放電電圧を大きくしていくと、分岐現象が観測される(図2)。また、Feigenbaum定数 $\delta \sim 4.4 \pm 0.3$ が得られている。放電現象に関しては更にBraunらにより既成のヘリウム放電管で発生する自励振動の周期倍化現象が報告されている¹⁷⁾。ここでは図3に示すように二次元のヘノンマップによって説明される新しい分岐過程が観測された。また、シースの不安定性¹⁸⁾に関連した周期倍化現象が大野らによって報告されている¹⁹⁾。ダブル・プラズマ装置中に置かれたグリッドとターゲット板の間に電流を流し前面に形成されるイオンシース中に不安定性が励起される時に、グリッドに外部から正弦的な電圧を印加する。このとき不安定性と外部強制振動の周波数比を変化させると図4に示すような周波数分岐現象が観測される。また他のプラズマの基礎実験において幾つか周期倍化分岐現象の報告がある²⁰⁾⁻²¹⁾。

間欠性カオスに関してはCheungらによる報告がある²²⁾。彼等は熱陰極にリング状のタングステンフィラメントを用いた直流放電の放電電圧 V_0 に正弦波を重畳し、その振

幅を大きくしていくことにより、タイプIの間欠性カオスを観測した。その際、図5に示されているように間欠性カオスに特徴的な量である $1/f$ ノイズを得ている。

準周期運動からのカオスへの遷移が大野らにより報告されている²³⁾。周期倍化分岐が観測された同様の実験系において、周期倍化実験より外部から印加する正弦波の振幅を小さく設定し、不安定波と外部からの正弦波を共存させ、準周期系を実現する。このとき、外部から印加する正弦波の振幅を変化させると、図6のように、準周期運動からカオスへの遷移の一つとして知られているカーリーーヨークのモデルに対応するカオスへの遷移が得られている。また、放電現象に伴う準周期運動からのカオスがWeixingから報告されている²⁴⁾。

以上の実験はカオス現象の時間変化だけを考えた実験であった。しかし、プラズマ中の現象は波動現象を始め時-空間構造が本質的であると考えられる。現在、時-空間カオスに関して理論的研究がなされつつある。プラズマの基礎実験においても時-空間カオスに対する実験がChuらによって行われた²⁵⁾。実験は図7(a)のような同軸型のrf放電装置で行われた。内部に存在する強い電界と大きい密度勾配のため不安定性が励起される。rf電源の出力を変化させていくと準周期運動が観測される。このとき方位角方向に約 12° 離れて置かれた2本のプローブ信号の相互相関を求めると、あるrf出力以上で急激に相関が減少する。彼等はこれを時-空間カオスであると考えている。図6(b)はその実験結果である。dは相関次元を表している。rfの出力が0.2V以上で相互相関の値が0.7まで減少し、相関次元が12まで大きくなっていることが分る。しかし、この実験において解析に用いられたデータ点は1024点しかなく、一般に10程度の相関次元を求めるのに不十分だと考えられるため、実際現象が乱流的になっている可能性が高い。また相互相関の減少だけで時-空間カオスであると判別している点が問題として残る。このためこの結果が時-空間カオスを検証したとするには不十分であると思われるが、プラズマの基礎実験において始めて時-空間カオスを意識した実験がなされたことは今後の実験研究の方向性を示唆していると考えられる。

これまでのプラズマ基礎実験におけるカオス研究を分類すると(1)放電現象及び不安定性、(2)自励振動系及び外部強制振動系、(3)時間変化及び時-空間変化と三つの項目で分類できる。これまでの実験はこれら三つの項目のそれぞれの組み合わせで表される。全体的には、まだ放電現象を含めプラズマ物理の様々な分野でカオス現象がプラズマ中に存在するのかを検証している段階である。

3. 今後の課題

これまで述べたようにプラズマの基礎実験におけるカオス現象の研究は、まだカオスの検証段階にあり、端緒についたばかりと言ってよい。これからの研究の方向としてはカオス現象が本質的にプラズマに対してどのような影響を与えるかを研究する必要があると考えられる。一つはカオスの発生により実際のプラズマ中の物理量(例えば拡散係数)等がいかに変化するかを実験的に調べる必要があろう。また、プラズマ中の多様な波動現象と時-空間構造を持ったカオスとの関係を明らかにすることも重要であると考えられる。この場合、分散関係を含む空間自由度の問題をどのように扱い、実験的に空間自由度を制御するかが問題となる。いずれの場合も実験研究だけで

は不十分であり、理論研究が不可欠であると考えられる。しかし、これまでプラズマ基礎実験で観測されたカオス現象を説明する理論はほとんどなかったと言ってよい。それは、プラズマ中のカオス現象の検証のみに注目していたため、理論構築に必要な基礎的物質量に関するデータを実験側が提供してなかったのが第一の原因であると考えられる。そのため、今後プラズマ中のカオス現象に対して実験と理論双方の研究者による相補的研究が行われる必要がある。

参考文献

- 1) R. M. May, *Science*, 186(1974)645.
- 2) T. Y. Li and J. A. Yorke, *Amer. Math. Monthly* 82(1975)985.
- 3) M. J. Feigenbaum: *J. Stat. Phys.* 19(1978)25.
- 4) A. Brandstater, J. Swift, H. L. Swinney, A. Wolf, J. D. Farmer, E. Jen and P. J. Crutchfield: *Phys. Rev. Lett.* 51(1983)1442.
- 5) H. Nakatsuka, S. Asaoka, H. Itoh, K. Ikeda and M. Matsuoka: *Phys. Rev. Lett.* 50(1983)109.
- 6) S. D. Brorson, D. Dewey and P. S. Linsey: *Phys. Rev.* A28(1983)1201.
- 7) P. S. Linsey: *Phys. Rev. Lett.* 47(1981)1349.
- 8) F. Takens: in *Dynamical Systems and Turbulence: Vol. 898 of Lecture Notes in Mathematics*, edited by D. A. Rnand and L. S. Young(Springer, Berlin, 1981), 336
- 9) M. H. Jensen, L. P. Kadanoff, A. Libchaber, I. Procaccia and J. Stavans: *Phys. Rev. Lett.* 55(1985)2798.
- 10) I. Shimada and T. Nagashima: *Prog. Theor. Phys.* 61(1979)1605..
- 11) P. Grassbergaer and I. Procaccia: *Phys. Rev. Lett.* 50(1983)346 .
- 12) T. C. Halsey, M. H. Jensen, L. P. Kadanoff, I. Procaccia and B. I. Shraiman: *Phys. Rev.* A33(1986)1141.
- 13) S. Sato, M. Sano and Y. Sawada: *Prog. Theor. Phys.* 77(1987)1.
- 14) H. G. E. Hentschel and I. Procaccia: *Physica*, 8D(1983)435.
- 15) R. W. Boswell: *Plasma Physics and Controlled Fusion*, 27(1985)405.
- 16) P. Y. Cheung and A. Y. Wong: *Phys. Rev. Lett.* 59(1987)551.
- 17) T. Braun, J. A. Lisboa, R. E. Francke and J. A. C. Gallas: *Phys. Rev. Lett.* 59(1987)613.
- 18) N. Ohno, M. Tanaka, A. Komori and Y. Kawai: *Phys. Fluids* B3(1991)228.
- 19) N. Ohno, M. Tanaka, A. Komori and Y. Kawai: *J. Phys. Soc. Jpn.* 58(1989)28.
- 20) D. Boro, V.N. Rai and P. K. Kaw: *Phys. Lett.* 119(1987)411.
- 21) J. Qin, L. Wang, D. P. Yuan, P. Gao, and B. Z. Zhang: *Phys. Rev. Lett.* 63(1989)163.
- 22) P. Y. Cheung, S. Donovan and A. Y. Wong: *Phys. Rev, Lett.* 61(1988)1360.
- 23) N. Ohno, A. Komori, M. Konno and Y. Kawai: *Phys. Fluids* B5(1993)798.
- 24) D. Weixing, H. Wei, W. Xiaodong and C. X. Yu: *Phys. Rev. Lett.* 70(1993)170.
- 25) J. H. Chu and I. Lin: *Phys. Rev* A39(1989)223.

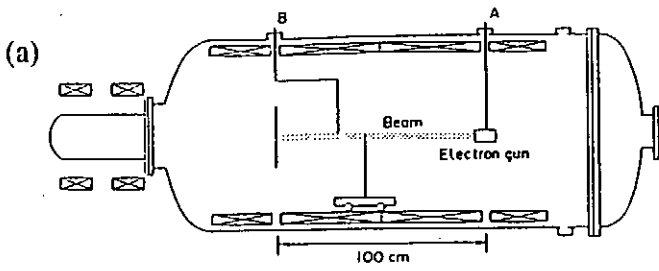


FIG. 1.—The experimental device WOMBAT.

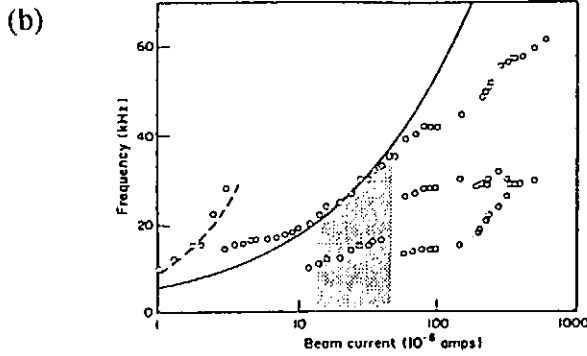


図1 電子ビーム系のカオス実験 (a) 実験装置；
(b) 周波数分岐のダイアグラム。文献15)より抜粋。

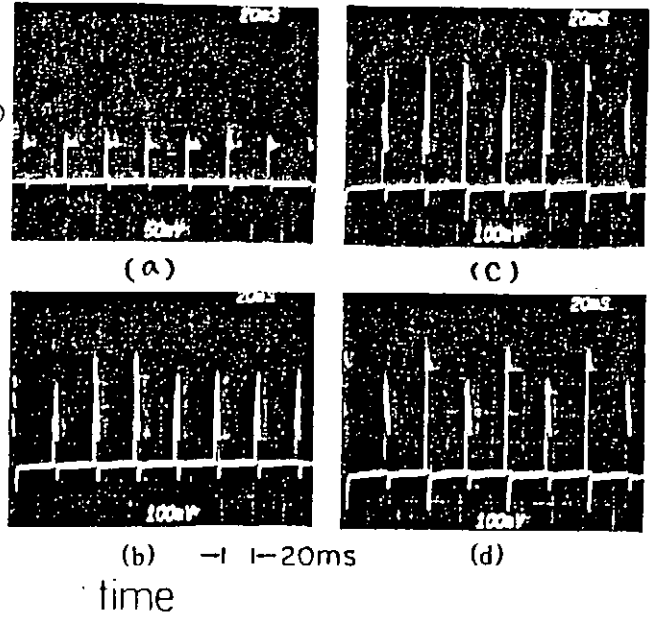


図2 パルス放電において周期倍化を表す時系列データ。文献16)より抜粋

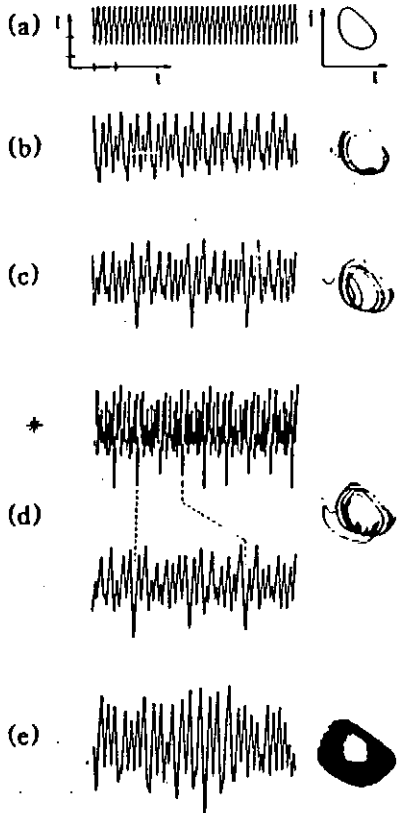


図3 ヘリウム放電管で観測された5周期系の周期倍化現象。文献17)より抜粋。

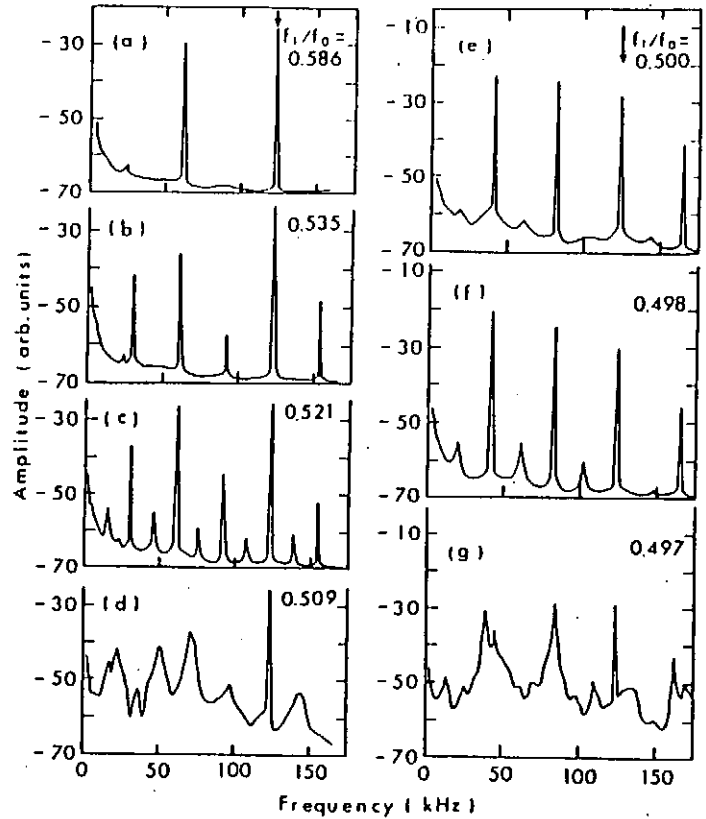


図4 イオンシース中で観測された周期倍化分岐現象。文献19)より抜粋。

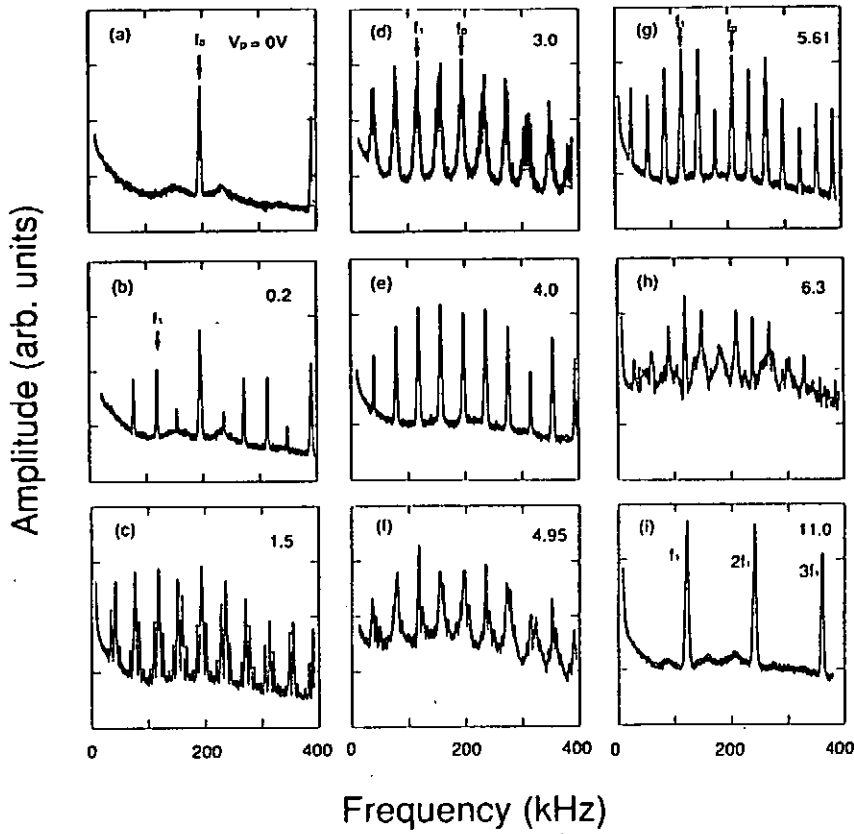


図6 イオンシース中で観測された準周期運動からのカオス。文献23)より抜粋。

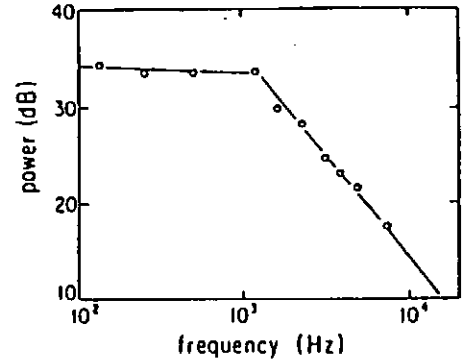


図5 放電で観測された間欠性カオスの特徴である1/fノイズを示すスペクトル。文献22)より抜粋。

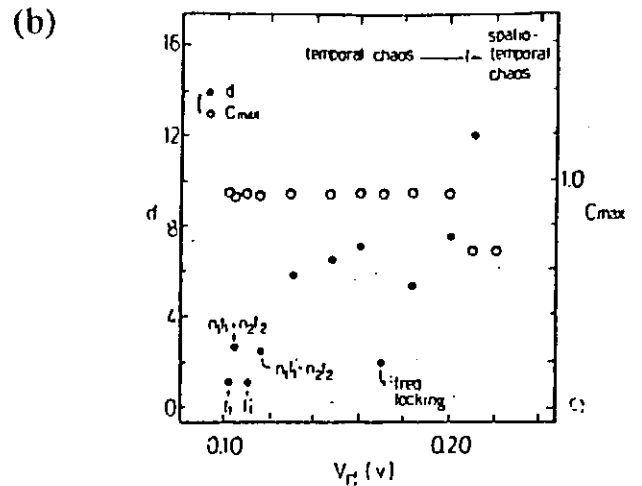
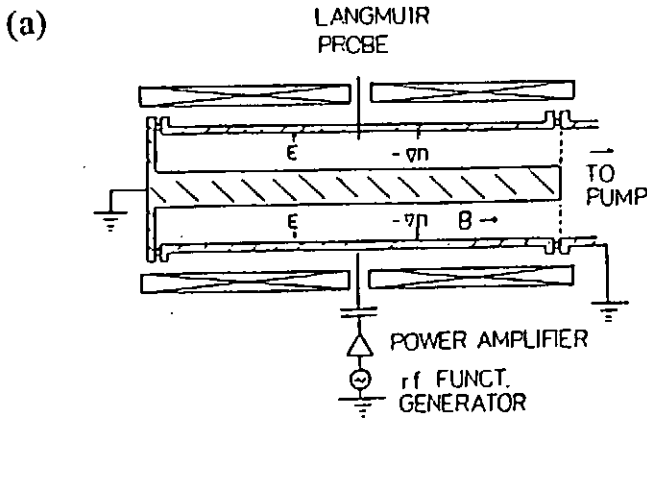


図7 時-空間カオスの実験。(a) 実験装置；(b) rf出力に対する相関次元と相互相関の値の変化。文献25)より抜粋。

1. はじめに

逆磁場ピンチ (Reversed Field Pinch, RFP)¹ はMHD緩和現象²で特徴づけられる, 磁気エネルギーが最低の状態に近いトロイダル電流系の1つである. 典型的なRFP配位における安全係数 q の径方向分布と m/n モード (m, n はそれぞれポロイダル, トロイダルモード数) に対する共鳴面 (モード有理面) の位置を図1に示す. RFP配位では $m=1$ モードの共鳴面が近接して存在しており, トロイダル磁場反転面近傍では特に密集しているのがわかる. 従って, RFPでは共鳴モードの振幅が比較的小さい段階で磁気島の重なり合いがおこるため, 平衡配位の形成・保持においてプラズマの非線形モード結合が重要な役割を果たす. これは, RFPがプラズマの安定性を強い磁気シアに依存していることの代償と考えられる. 非線形モード結合の結果, 観測される磁気揺動は波数 (モード数) が幅広くひろがった乱流的なスペクトルとなる. これは, 磁力線の再結合によってプラズマ内部の磁力線構造がストカスティックになっている (磁力線のカオス) ことの反映でもあると考えられる.

本稿ではまず, 最近のRFP実験において明らかにされてきた, 揺動に関する非線形現象を概観する. ここで用いられている解析手法は主にフーリエ変換である. 次に, 揺動を支配する系の自由度に注目した, カオスの立場からの揺動解析の試みを紹介する. 最後にまとめと今後の課題, 展望を述べる.

2. RFPにおける非線形現象とカオス

2-1. 磁気揺動とモード結合

RFP配位の形成過程では $m=1$ ($n>1$) キンクモードによる強い磁場揺動が観測されている. 配位の形成過程における $m=1$ モードの役割は, 模式的には図2のように考えられている.³ $m=1$ モードの成長に伴い電流経路がヘリカルに変形する (揺動電流, 図2b) と, 径方向磁場の揺動 \tilde{B}_r が生ずる. 揺動電流の谷の領域では \tilde{B}_r は互いに反平行となっており, 従ってこれらを両側から押しつける流れ \tilde{v}_z が存在すれば, 磁気リコネクションがおこる. その結果軸対称RFP配位が形成される.

形成されたRFP配位は磁場の抵抗性拡散に抗して準定常的に維持されることが確かめられており, この機構をRFPダイナモと呼んでいる. RFPダイナモの過程も基本的には上述の描像で説明できる. 即ち, 形成直後の安定なRFP配位は, 磁場の抵抗性拡散に

よって、いくつかの共鳴モードに対して不安定な分布へと変化する。単一ヘリシティーのモードが不安定になる場合には、このモードに伴う B_r と v_z の相互作用によって磁場反転面付近にポロイダル起電力が生じ、これによって抵抗性減衰に抗してポロイダル電流が維持される。このような RFP 配位形成およびその維持は、RFP における自己組織化の例である。⁴

以上のモード間の非線形相互作用（モード結合）の過程においては、軸対称配位のように空間的スケールの大きい構造と同時に微小な磁場構造も出現する。これは、その波数が相互作用する2つのモードの波数の和で表現される構造に対応する。空間的スケールの小さい磁場構造はエネルギーの散逸が大きいいため速やかに消え、スケールの大きい構造が生き残る。このような過程が間欠的にあるいは連続的に生ずることによって、RFP 配位が準定常的に維持されていると考えられる。実際には図1からわかるようにヘリシティーの異なるモードが励起されるため、観測される磁気揺動の振舞は非常に複雑である。

これらの過程における磁気揺動の振舞は、Fourier 変換の手法で解析されてきた。⁵⁻⁹ ポロイダル、トロイダル方向の磁気プローブ列からの信号を Fourier 変換して瞬時のモード（波数）スペクトルを得ることができる。一般的な傾向としては、図3⁸に示すように、ポロイダルモード数に関しては $m=1, 0$ が支配的であり、トロイダルモード数に関しては $n \sim 2R/a$ にピークを持ち、幅広いスペクトルの広がりを持っている。低周波成分は主に中心付近に共鳴面を持つ $m=1$ テアリングモードによる揺動、高周波成分は周辺部に局在する共鳴モード（抵抗性 g モード？）による揺動であることが示されている。

非線形モード結合の過程を直接調べるために、MST では bispectrum の手法を用いている。⁹ three wave coupling を特徴づけるバイコヒーレンス $b(k_1, k_2, k_3)$ ($k_3 = k_1 + k_2$) の測定結果の例を図4に示す。ポロイダルモードについては $m=1$ モードと $m=2$ モードの結合が卓越しており、またトロイダルモードについては $n=5-8$ （中心付近に共鳴面を持つ）のモード間の結合が強いことがわかる。MST ではダイナモが間欠的な現象として観測されるが、このとき軟 X 線、周辺トロイダル磁場などは鋸歯状振動を示す。この振動のクラッシュフェイズ（このときトロイダル磁束が増加）ではモード結合に関与するモードの数は急激に増加することも示されている。

2-2. イオン加熱

RFP において観測されるイオン温度は、オーミック加熱された電子とのクーロン衝突から予想される値よりも十分高く、イオンの異常加熱と呼ばれてきた。^{11, 12} 実験的には磁気揺動レベル（振幅）とイオン温度の間に相関のあることが示され、これに基づいて揺動のエネルギーの一部がイオン粘性により散逸されイオン加熱がおこるという理論モデルが出された。^{13, 14}

最近、MST では高時間分解能の NPA (Neutral Particle Energy Analyzer, 中性粒子エ

エネルギー分析器)を用いてイオン温度の時間発展が詳しく調べられた。^{15, 16}磁気揺動との関連では、プラズマ内部のトロイダル磁束が増加するフェイズで、イオンサイクロトロン周波数を含む高周波領域の磁場揺動が強く励起され、それに伴ってイオン温度の上昇が観測されるとしている(図5)。さらに、イオンのエネルギー分布に高エネルギーテイルが存在することを示す結果もある。揺動のモードスペクトル(波数スペクトル)と伝搬速度の詳細は今後測定されなければならないが、高周波として観測される揺動の増大は、モード結合とイオン加熱機構の関係を考える上でも興味ある問題であろう。

2-3. 揺動と輸送

RFP周辺部の揺動とそれに関連する輸送の実験的研究^{8, 17-21}が精力的に進められてきている。静電プローブ、磁気プローブによって測定された揺動諸量の相関から粒子束、エネルギー束などを評価する。現在までの実験結果をまとめると次のようになる。

粒子輸送に関しては、周辺部の静電揺動による粒子束が測定されており^{17, 18}、これはH α 線測定から評価される(全)粒子束に対して大きな寄与をしている¹⁹ことが示されている(図4)。一方、磁気揺動による粒子束は電子、イオンをそれぞれ個別に測定することはできていないが、両粒子束の和である電流の揺動測定から、磁気揺動による粒子束は両極性の条件を満たす⁸とされている(図6)。これは磁気揺動による粒子束の表式からの予想とは異なっており、さらに詳しい測定が必要だろう。

エネルギー輸送¹⁷⁻¹⁹に関しては、静電揺動による電子の熱流束は正味加熱入力の10%以下¹⁹であり、十分小さいとされている(図7)。ただし熱流束の値は同規模トカマクにおけるそれと同程度である。RFPではトカマクに比べて磁気揺動レベル \tilde{B}_r/B が大きい($\sim 1\%$)。このため、磁気揺動が電子エネルギー輸送に重要な役割を果たすと考えられている。この磁気揺動による電子熱流束の直接測定は現在進められているところである。

電流の輸送^{20, 21}はRFPダイナモの機構と直接関係するのであるが、現在のところコヒーレントなモードの速度揺動-磁気揺動の相互作用 $\langle \tilde{v} \times \tilde{B} \rangle$ による(MHDダイナモ)か、または、オーミック電場により生成される高速電子が担う電流の磁気揺動による拡散が主な機構であると考えられている。

2-4. 磁気揺動のカオス

RFP配位の形成とその維持過程における磁場構造の時間発展を波数空間で眺めると、次のように表現できる。不安定モードの成長とその結果生じるモード結合は、波数空間でのスペクトルの広がりをもたらす。このうち、波数の大きい、即ち空間的に小さい構造をもつ揺動はエネルギーの散逸によって安定化される。その結果、波数の小さい、空間的に規模の大きい構造が卓越するようになる。

以上の過程には、波数空間でより広がろうとする、多自由度系(発達した乱流)への発

展と、単純な構造の発現、即ち少数自由度系への発展の競合過程であるように見える。この発展過程における系の自由度を考えることができるのであろうか。あるいは、中間的な状態としての中間自由度の系が存在するのであろうか。

このような観点から、RFPの揺動をカオスの立場から解析し、アトラクターの相関次元を求める試みがいくつか行われている。HBIX-1Aでは B_θ 、 B_ϕ の相関次元 $\nu \sim 5-7$ である²²としている。一方、MSTでは磁場揺動、静電揺動などの解析が行われたが、低次元のアトラクター($\nu < 16$)は存在しない²³としている。

ここでは京都工芸繊維大学のSTE-2RFP装置における磁気揺動信号の解析の試みについて述べる。特に、RFP放電とUltra-Low-Q(ULQ)放電における磁気揺動信号から相関次元を求めた。図8(a)、(b)にそれぞれの放電波形を示す。プラズマ電流値はともに約50kA、放電持続時間は約1msである。磁気揺動信号は0.1 μ sの周期でサンプリングした。データ点は4096点である。これをGrassberger-Procacciaのアルゴリズムに基づいて解析し、相関次元を求めた。

結果の例を図8(c)に示す。ULQ放電の場合、相関次元 $\nu > 2$ に向かって飽和しているようであり、低次元アトラクターの存在が示唆される。一方、RFP放電の場合には相関次元に飽和の傾向は見られない。現在のところ、この相関次元の違いはULQとRFPの磁場分布の違いに基づくものと考えている。すなわち、ULQにおいては少数の $m=1$ モードが磁気揺動を支配しているのに対して、RFPでは多数のモードが関与している可能性がある。現在、それぞれの放電における平衡磁場分布、モードスペクトルの解析などを進めている。

3. まとめ

以上述べたように、揺動の解析はRFPのダイナミクスを理解する上で非常に重要である。周辺部の揺動に低次元のストレンジアトラクターが存在すれば、揺動は少数自由度の力学系でモデル化できる可能性がある。これは、周辺揺動の系統的な理解につながる。さらに、アトラクターの次元と揺動の性質、ダイナモの性質、閉じ込め特性などとの間に対応関係が存在すれば、プラズマのダイナミクスを理解する上で力学系モデルが有効な役割を果たす可能性がある。

今後、まず解析手法の標準化が望まれる。さらに、磁場揺動の振舞い、閉じ込め特性などによって区別される種々の放電条件のもとで系統的に解析を進める必要がある。(トカマクの例では、TEXTORでそのような試み²⁴が進んでいる。)これらと並行して磁気揺動のモデルの開発を進めることが重要である。

References

1. H.A.B.Bodin: Nucl. Fusion 30 (1990) 1717.
2. J.B.Taylor: Rev. Mod. Phys. 58 (1986) 741.
3. D.A.Baker: Geophysical Monograph 30, American Geophysical Union 1984, 332.
4. A.Hasegawa: Adv. Phys. 34 (1985) 1.
5. K.Hattori, Y.Hirano et al: Phys. Fluids B 3 (1991) 3111.
6. H.Arimoto, A.Nagata et al.: J. Phys. Soc. Jpn. 61 (1992) 1202.
7. S.Hokin, A.Almagri et al.: Phys. Fluids B 3 (1991) 2241.
8. W.Shen, R.Dexter et al.: Phys. Rev. Lett. 68 (1992) 1319.
9. A.Almagri, S.Assadi et al.: Phys. Fluids B 4 (1992) 4080.
10. S.Assadi, S.Prager et al.: Phys. Rev. Lett. 69 (1992) 281.
11. R.B.Howell, Y.Nagayama: Phys. Fluids 28 (1985) 743.
12. Y.Hirano, Y.Nogi et al.: Jpn. J. Appl. Phys. 27 (1988) 397.
13. C.Gimblett: Europhys. Lett. 11 (1990) 541.
14. Z.Yoshida: Nucl. Fusion 31 (1991) 386.
15. E.Scime, S.Hokin et al.: Phys. Rev. Lett. 68 (1992) 2165.
16. E.Scime, M.Cekic et al.: Phys. Fluids B 4 (1992) 4062.
17. H.Ji, H.Toyama et al.: Phys. Rev. Lett. 67 (1991) 62.
18. T.Rempel, C.Spragins et al.: Phys. Rev. Lett. 67 (1991) 1438.
19. T.Rempel, A.Almagri et al.: Phys. Fluids B 4 (1992) 2136.
20. H.Ji, H.Toyama et al.: Phys. Rev. Lett. 69 (1992) 616.
21. S.Ortolani: Plasma Phys. Control. Fusion 34 (1992) 1903.
22. S.J.Gee, J.B.Taylor: 12th Europ. Conf. on Control. Fusion and Plasma Phys. Vol.2 (1985) 446.
23. C.Watts, J.Sprott: Bull. Am. Phys. Soc. 35 (1990) 2011.
24. V.Budaev, G.Fuchs et al.: Plasma Phys. Control. Fusion 35 (1993) 429.

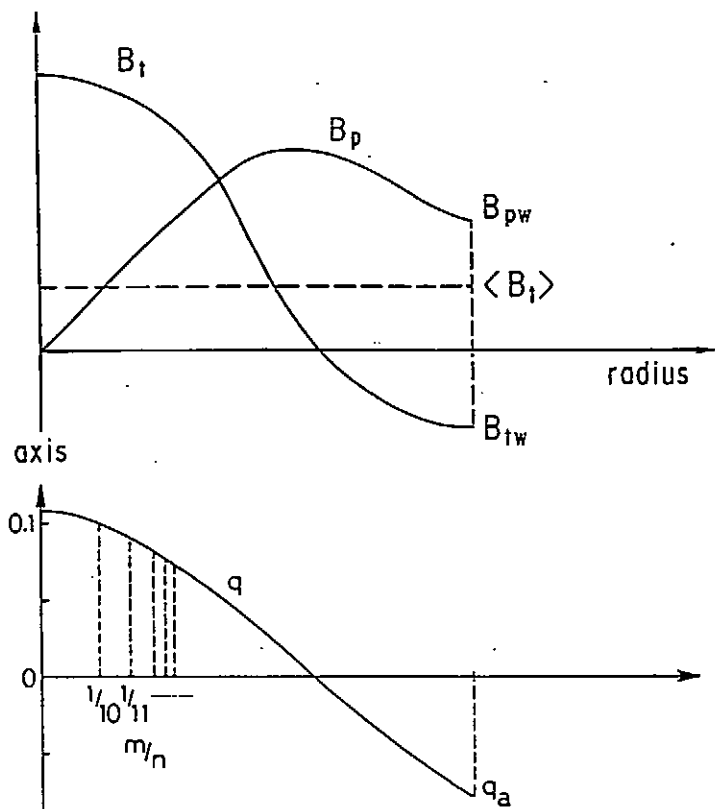


図 1. RFP 磁場配位, q 分布と有理面の位置.

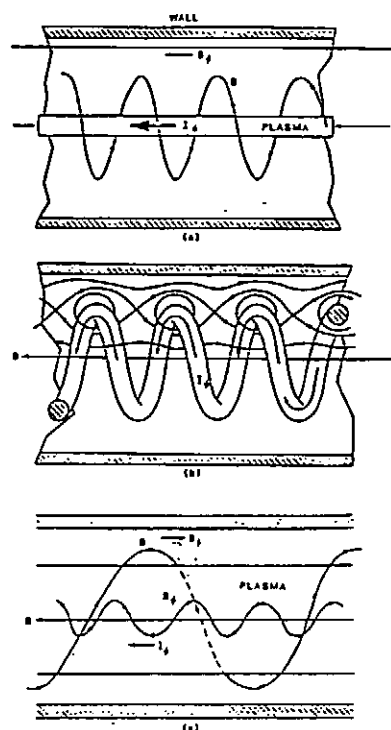


図 2. $m=1$ モードの成長と RFP 配位の形成過程. 文献 3 より転載.

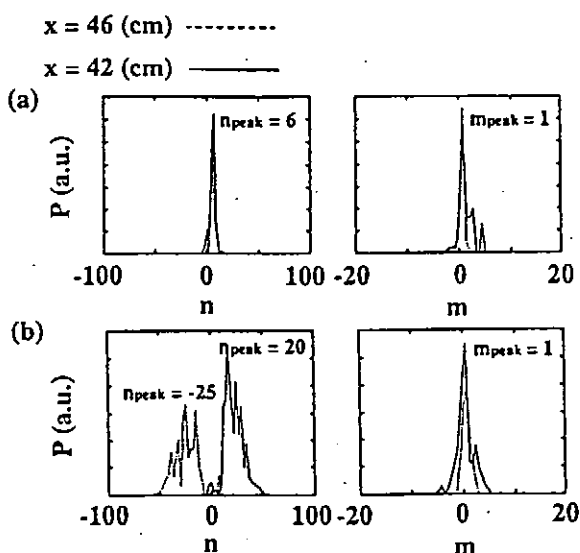


FIG. 4. Mode number spectra of magnetic fluctuations. (a) Spectra at low frequency (5 kHz to 50 kHz) and (b) spectra at high frequency (50 kHz to 250 kHz). The dashed lines correspond to minor radius $r=46$ cm, and the solid lines to $r=42$ cm. The poloidal and toroidal mode numbers are denoted by m and n , respectively. The values of m and n at the peaks are indicated in the figures.

図 3. 磁気揺動のモードスペクトル. 文献 8 より転載.

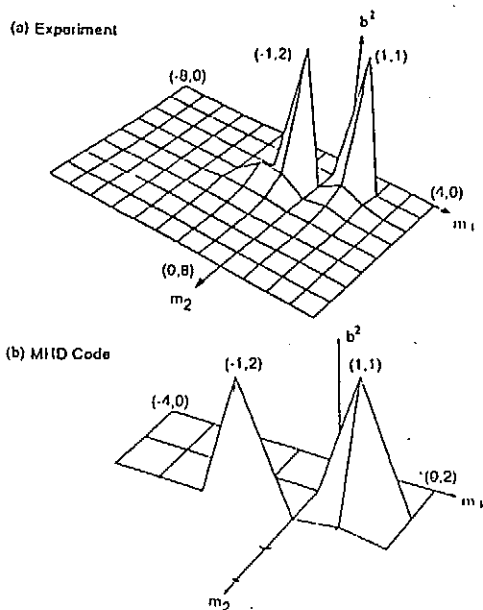


FIG. 1. Bicoherence, $b(m_1, m_2, m_3)$, of poloidal modes obtained from the poloidal magnetic field component from (a) experiment and (b) MHD code. The horizontal axes denote m_1 and m_2 . The vertical axis denotes the bicoherence corresponding to $m_3 = m_1 + m_2$. The peak amplitude has a value 0.35 in (a) and 0.6 in (b).

(a)

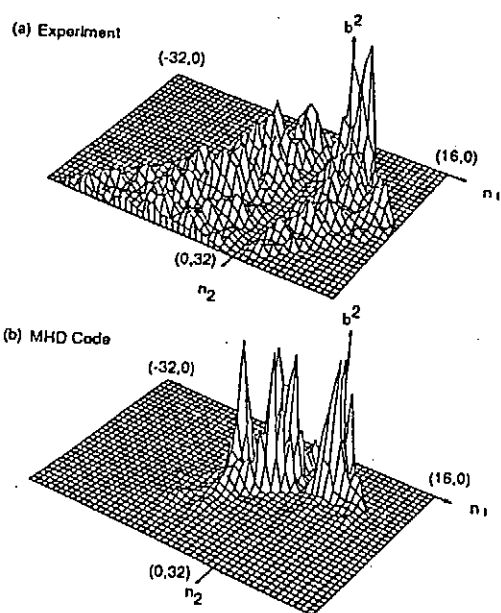


FIG. 2. Bicoherence, $b(n_1, n_2, n_3)$, of toroidal modes obtained from the toroidal magnetic field component from (a) experiment and (b) MHD code. The horizontal axes denote n_1 and n_2 . The vertical axis denotes the bicoherence for $n_3 = n_1 + n_2$. The peak amplitude has a value 0.45 in (a) and 0.61 in (b).

(b)

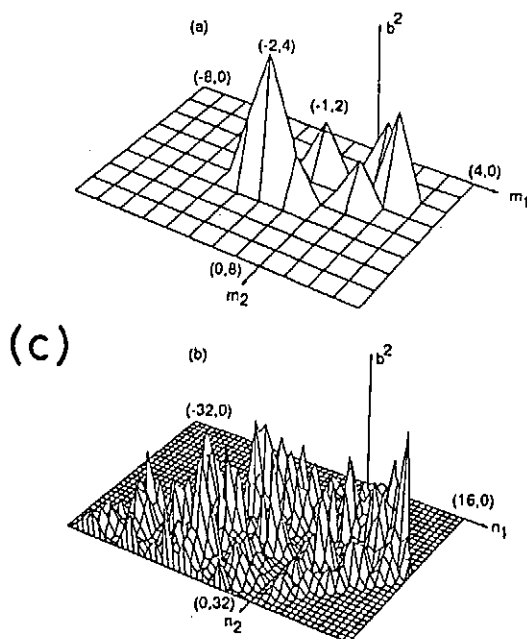


FIG. 4. Experimental bicoherence at the onset of a sawtooth crash for (a) poloidal modes and (b) toroidal modes. The peak amplitude has a value of 0.52 in (a) and 0.42 in (b).

図 4. 磁気揺動のバイコヒーレンス。(a)ポロイダルモード, (b)トロイダルモード, いずれも鋸歯状振動のない場合。(c)鋸歯状振動時のバイコヒーレンス。文献 10 より転載。

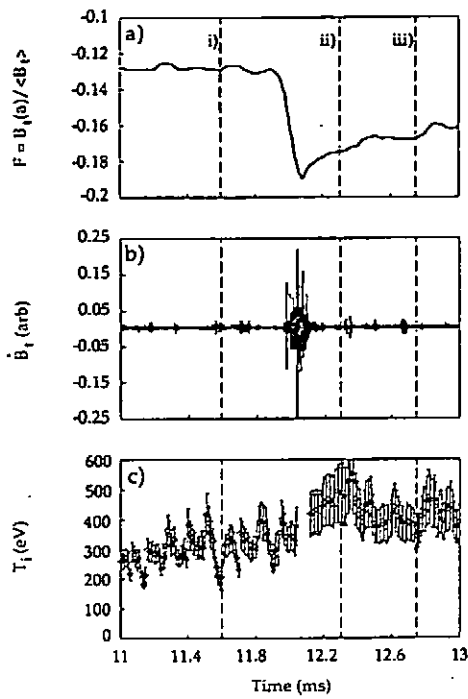


FIG. 3. (a) Enlarged view of reversal parameter during a dynamo burst (not the same discharge as Fig. 1). (b) High-frequency, 0.5–5.0 MHz, toroidal magnetic-field fluctuations during the same time interval. (c) Ion temperature from CXA during the same interval.

図 5. 鋸歯状振動時のイオン温度変化と高周波磁気揺動. 文献 15 より転載.

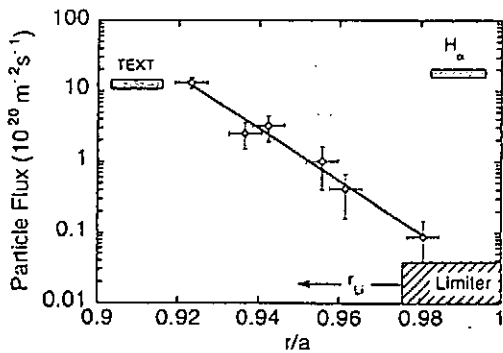


FIG. 4. Radial profile of edge electrostatic fluctuation-induced particle flux, Γ_i^{ES} (solid line) in MST. Peak edge electrostatic particle flux measured on TEXT (Ref. 10), and total edge losses in MST inferred from H_α measurements are shown for comparison. The ion Larmor radius in MST is also illustrated.

図 6. 静電的揺動による粒子束. 文献 19 より転載.

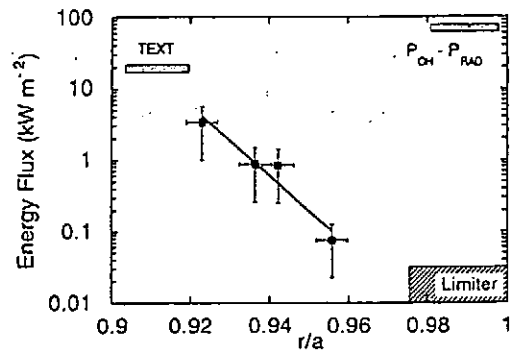
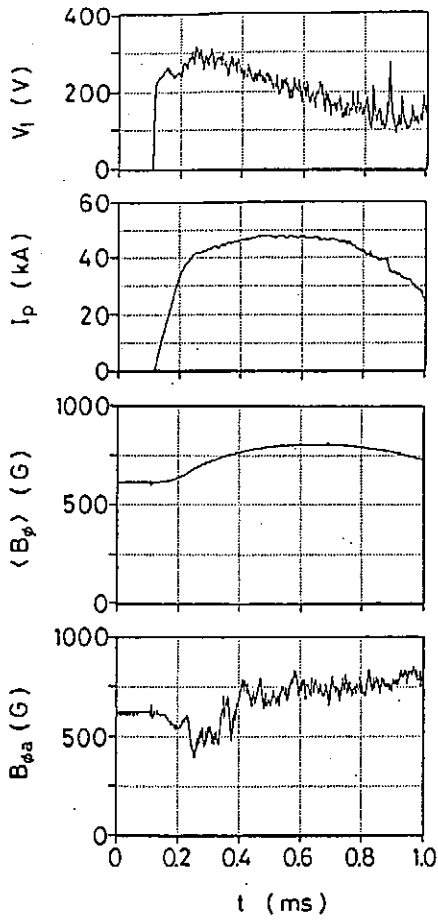
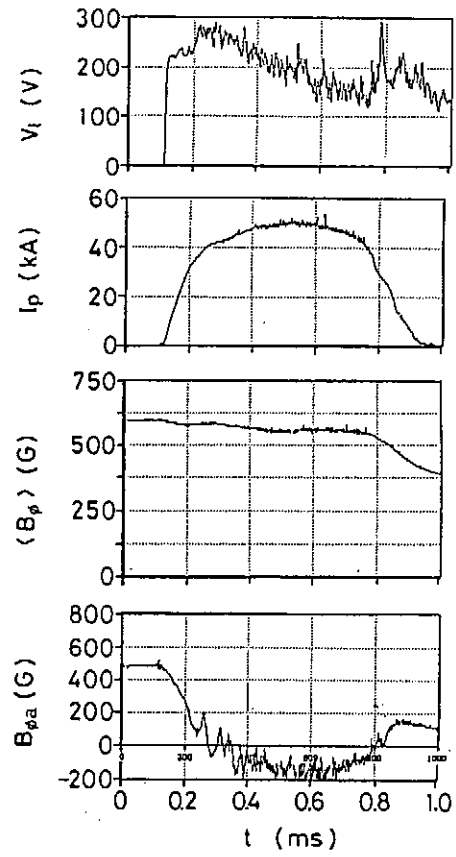


FIG. 6. Radial profile of edge electrostatic fluctuation-induced energy loss flux, Q_E^{ES} (solid line) in MST. Peak edge electrostatic energy flux for TEXT (Ref. 12) and total nonradiative losses for MST are shown for comparison.

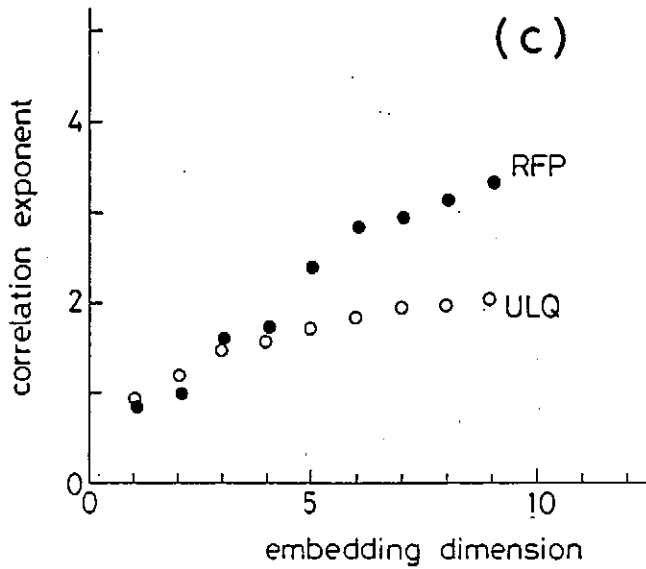
図 7. 静電的揺動による電子の熱流束. 文献 19 より転載.



(a)



(b)



(c)

図 8. S T E - 2 における磁気揺動の解析. (a) U L Q 放電波形, (b) R F P 放電波形, (c) 相関指数対埋め込み次元.

磁力線のカオス理論

核融合科学研究所 羽鳥尹承

1. はじめに

磁力線のカオスに関する解説は既にいくつかある ([1],[2])。特に文献 [1] は最も一般向けの解説である。一方文献 [2] はプラズマ関係の一般向け解説である。

磁力線の方程式はニュートン力学に帰着することが証明できるので、磁力線のカオスを研究することは、保存力学系のカオスを研究することに等しい [3]。対称性のあるハミルトニアンでは力学的カオスは起こらないが、対称性を破る非線形摂動の大きさが臨界値を超えるとカオス軌道が発生する。しかし、このときでも初期条件によってはカオス軌道とならない場合もある。トーラス配位の磁場において磁気面領域とカオス領域が共存しているのはこの理由からである。

2. 磁場の単純モデル

トロイダル磁場の構造を調べるとき、しばしば用いられる技法はポロイダル断面と磁力線の交点をプロットすることである。例えば、点 A からトーラスを一周した磁力線が点 B に戻る時、途中の軌道は無視して点 A から点 B に移る法則を見つければ磁力線の構造を調べるのが遥かに簡単になる。磁力線を力学に対応させるならば、トロイダル角が時間に対応している。時間変数が 2π ずつの周期的な値にだけ着目していることになる。このような点 A から点 B への変換のことを保測写像と呼んでいる。この写像は面積を保存する性質がある。現実の磁力線に対して具体的に写像を求めることは困難であろうが、一つの近似として、あるいは単純モデルとして、導入されているものがある [4]。例えば標準写像がある。標準写像は磁場のシアーが一定だが、シアーの空間依存性を取り入れた非線形写像もある [5,6]。写像より現実に近づくモデルとして、2-Wave Hamiltonian がある [7]。このモデルは連続時間モデルであり写像ではない。Tearing mode が 2 つ存在する時のモデルともいえる。モデルに基づく研究の利点は、基礎式の煩雑さから逃れ、精密な数値計算が長時間可能であったり、理論的な扱いが可能になったりする [5,7]。

3. Tearing Mode の非線形結合

この物理機構は元来はトカマクの電流破壊現象が動機となって研究が始まった。いまでもその路線に沿う研究が続けられているかどうかは知らないが、しかしそのような視点を抜きにしてもこの MHD 現象は磁力線のカオスの視点から見

れば非常に興味深い現象である [9,10,11,12]。トーラス磁力線のポロイダル断面は力学の位相空間に対応している。MHD 現象では位相空間が実空間として見えていることになる。このポロイダル断面の構造が MHD の時間発展を直観的に理解する上で大いに役立つ。例えば、磁力線のカオスの発生に呼応して、アルヴェン波が発生する現象がみつかつていっている [11]。

4. ヘリカル系トーラスの周辺領域

ヘリカルトーラス系のセパラトリックス周辺でカオス領域が存在する [13]。この磁力線はどのようなハミルトニアンで記述されるのかを先ず知りたい。Lie 変換による系統的な展開形式によってハミルトニアンが具体的に求まった [14]。このハミルトニアンによれば磁気軸上でエネルギーが一番低く、周辺に向かうほど高くなる。従って低エネルギーの軌道は周期軌道であるが高励起の軌道はカオスになっている。セパラトリックスの外は非捕捉軌道を表しているから、原子内の電子が外部からの電磁波で励起されついにイオン化される物理過程とヘリカルトーラス磁力線とは数学的な構造がよく似ている。

ハミルトニアンの具体形が分かったのでハミルトニアン系のために開発されたシンプレクティック法を適用して磁力線の精密な数値計算が可能となった。従来のシンプレクティック法では磁力線のハミルトニアンに適用できなかったが、新たな手法の開発のめどがたち [15]、現在数値解析が進行中である。

5. 磁気面/カオスの境界領域

磁気面のある構造はプラズマを閉じこめるために必要な構造である。従って磁気面領域の境界を知るとはプラズマ閉じこめの目的にとっても重要な課題には違いないが、実用上の目的から離れても物理としてたいへん興味ある問題である [16,17]。磁気面上の磁力線はいくら長い距離追跡しても磁気面を離れることは無い。この意味で追跡距離無限大に対して安定である。一方典型的なカオス磁力線は拡散として記述できるから磁力線が元の場所に安定に留まるには有限な追跡距離に限られる。このように安定追跡距離が無限大の所から有限の所までどのように遷移するかを知りたい。この遷移の仕方は相転移に類似していることが発見されている。カオス領域から磁気面領域へ接近すれば、その安定追跡距離はべき則分布になっていることが知られている。これは磁力線の構造がフラクタル分布になっていることと密接な関係がある。一方磁気面の側からカオス領域に接近させ磁気面がどのように壊れてゆくのかに興味がある。壊れかけている磁気面としてカントーラスと呼ばれている一種の磁気面がある [17]。これは穴だらけの磁気面である。穴の数は無限個でカントールセットを

形成しているところからこの呼び名ができた。このような磁場構造を念頭に置いた磁力線の輸送理論を発展させる必要がある。カントーラスの存在する領域では単純な拡散としてはかたづけられないだろう。

参考文献

- (1) T. Hatori, “磁力線のカオス” パリティ 6月号 (1993)
- (2) T. Hatori, “プラズマにおけるカオス現象” 核融合研究 58巻、433 (1987)
- (3) T. Hatori, “プラズマのための解析力学” プラズマ若手夏の学校講義録 (1992)
- (4) T. Hatori, H. Irie, Y. Abe and K. Urata, “Chaotic Magnetic Field Line in Toroidal Plasmas”, Prog. Theor. Phys. Suppl. No.98, 83(1989)
- (5) T. Hatori, T. Kamimura and Y. H. Ichikawa, “Turbulent Diffusion for the Radial Twist Map” Physica 14D, 193(1985)
- (6) Y. H. Ichikawa, T. Kamimura and T. Hatori, “Stochastic Diffusion in the Standard Map” Physica 29D, 147(1987)
- (7) T. Hatori and H. Irie, “Long-Time Correlation for the Chaotic Orbit in the Two-Wave Hamiltonian” Prog. Theor. Phys. Vol.78, 249(1987)
- (8) Y. H. Ichikawa, T. Kamimura, T. Hatori and S. Y. Kim, “Stochasticity and Symmetry of the Standard Map” Prog. Theor. Phys. Suppl. No. 98, 1(1989)
- (9) T. Hatori and K. Urata, “プラズマにおける磁場とトポロジー” ながれ Vol.11, 96(1992)
- (10) T. Hatori, “Magnetic Structures in Confined Plasmas” Forma Vol.7, 101(1992)
- (11) K. Urata and T. Hatori, “Formation and Decay of Current Bubble in the Nonlinear Coupling Process of Resistive Tearing Modes”, Research Trends in Physics: Chaotic Dynamics and Transport in Fluid and Plasmas, I. Prigogine et al, published by AIP(1991)
- (12) K. Urata, “Nonlinear Coupling of the Resistive Tearing Modes under the Unperturbed Shear Flow”, J. Phys. Soc. Jpn Vol.59, 2742(1990)

- (13) T. Hatori and T. Watanabe, "Structures of Magnetic Field Lines in the Helical Torus", 2nd Toki Conf. on Plasma Physics and Controlled Fusion, Non-linear Phenomena in fusion Plasma-Theory and Computer simulation (1991)
- (14) G. Gnudi and T. Hatori, "Hamiltonian for the Toroidal Magnetic Field Lines in the Vacuum", J. Phys. Soc. Jpn Vol.62, 2030(1993)
- (15) G. Gnudi and T. Watanabe, "A New Numerical Integration Scheme of Very High Order and A-Stable", J. Phys. Soc, Jpn, Vol.62, 3492(1993)
- (16) Y. Aizawa, Y. Kikuchi, T. Harayama, K. Yamamoto, M. Ota and K. Tanaka, "Stagnant Motion in Hamiltonian Systems", Progr. Theor. phys. Suppl. No.98, 36(1989)
- (17) J. D. Meiss, "Symplectic Map, Variational Principles, and Transport", Rev. Mod. Phys. Vol.64, No.3, 795(1992)

広大な宇宙空間は非常に大きな自由度を持つ系であると考えられるが、その中で起きている現象の数々を、もともと少数自由度系に対する概念であるカオスの観点から理解しようとする試みがなされている。筆者の知る限りの文献のリストを、次頁以降に示す。今までのところ主に研究されているのは、以下の各トピックスである。

• 地球磁気圏の自由度の推定

太陽風プラズマ（外力）の影響のもとに変化する地球磁気圏の振舞いを、オーロラの活動度を表す地磁気指数の時系列解析により議論する。

• 有限振幅プラズマ波動と荷電粒子の相互作用

与えられたプラズマ波動の影響下での荷電粒子の運動をテスト粒子の立場から数値解析する。

• プラズマシート中の荷電粒子の運動

ニュートラルシートを持つ磁場形状の中のテスト粒子の運動の解析。

• 有限振幅非線形波動の発展過程

プラズマ波動を表現するモデル方程式を用い、励起系等における波動の長時間発展を議論する。

• その他

以下は筆者の感想の様なものである（それぞれの研究の内容については、筆者が中途半端な紹介をするよりは、個々の論文を参照して頂いた方がよいと思う）。

地球磁気圏の自由度の推定は、現在少なくとも3つのグループで行われており、次の2点で注目される。まず、これらのグループがいずれもアメリカのグループであること、そしてこれらのグループがいずれも異なる値を地球磁気圏の自由度として結論していることである（！）。これらは、斬新な研究手段・概念が研究者の間で市民権を得るために必要な時間が、アメリカ社会で最短であること、また、時系列からアトラクターの次元を求める手法はかなり以前から議論されているにも拘らず（Nicholis達による古気象データの時系列解析等）、ノイズの影響等、現実の問題への応用に当たって未だに未解決の要素が多く残されていること、をそれぞれ反映し、興味深い。

プラズマ波動中の荷電粒子の振舞いの基礎物理については、Karney達による研究等、もともと核融合プラズマ（RF加熱etc）を対象として、多くの議論がなされて来た。このアプローチをそのまま宇宙プラズマ波動に適用する試みがなされているようであるが、宇宙プラズマ環境の中で、単色波動を用いた議論が有効であるとは想像しがたい。また、粒子の運動が波動に与える影響を取り入れることが、宇宙プラズマの場合、どうしても必要であると思われる。今後の議論の発展に期待したい。

プラズマシート内の荷電粒子の運動の研究は、当初はコンピュータの遊び位にしか受け止められていなかったが、最近になって、カオス軌道を持つ粒子が担うニュートラルシートの異常抵抗が計算され、注目を集めた。もっとも、その異常抵抗の値もこれまでに知られていたものと本質的に変わるものではなく、結局、異常抵抗というマクロな物理量においては、個々の粒子のカオス運動の持つ特性（長い相関時間等）は統計的に平均化され、表面にはあらわれないという当然の結果が示されることとなった。

非線形プラズマの発展過程は、筆者も興味を持っている問題であり、宇宙空間プラズマには境界が無いこと、大振幅波が存在し得ること、等の理由により、宇宙は非線形波動の研究のための格好の実験室であると思っている。その一方で、波動の発展を議論するための数学的モデルと、実際のプラズマ中の波動との間には、残念ながらまだまだ深くて広い溝があるようである。例えば、音波との相互作用を無視できる近似のもとでの1次元アルヴェン波の発展はDNLS方程式（可積分）で与えられるが、現実のプラズマにおいては、音波との相互作用、3次元性、プラズマの運動論的効果等、DNLS系の結果をそのまま適用することを妨げる数々の要因があり、これらの点の克服には今後の発展に期待するところが大きい。

Chaos Research in Space Plasma Physics

-1985

Not found.

1986

- Büchner, J., and L. M. Zelenyi, Deterministic chaos in the dynamics of charged particles near a magnetic field reversal, *Phys. Lett. A.*, 118, 395, 1986.
- Burlaga, L. F. and L. W. Klein, Fractal structure of the interplanetary magnetic field, *J. Geophys. Res.*, 91, 347, 1986.
- Chen, J., and P. J. Palmadesso, Chaos and nonlinear dynamics of single-particle orbits in a magnetotail-like magnetic field, *J. Geophys. Res.* 91, 1499, 1986.
- Martin, R. F., Chaotic particle dynamics near a two-dimensional magnetic neutral point with application to the geomagnetic tail, *J. Geophys. Res.* 91, 11985, 1986.

1987

- Büchner, J., and L. M. Zelenyi, Chaotization of the electron motion as the cause of an internal magnetotail instability and substorm onset, *J. Geophys. Res.* 92, 13456, 1987.
- Ghosh, S. and K. Papadopoulos, The onset of Alfvénic turbulence, *Phys. Fluids* 30, 1371, 1987.

1988

- Martin, R. F. and T. W. Speiser, A predicted energetic ion signature of a neutral line in the geomagnetic tail, *J. Geophys. Res.* 93, 11521, 1988.
- Gabriel, P. *et al.*, Multifractal analysis of resolution dependence in satellite imagery, *Geophys. Res. Lett.* 12, 1373, 1988.

1989

- Büchner, J. and L. M. Zelenyi, Regular and chaotic charged particle motion in magnetotail-like field reversals, 1, Basic theory of trapped motion, *J. Geophys. Res.* 94, 11821, 1989.
- Chan, A. A. *et al.*, Nonlinear interaction of energetic ring current protons with magnetospheric hydromagnetic waves, *Geophys. Res. Lett.* 10, 1133, 1989.
- Goertz, C. K., and R. A. Smith, The thermal catastrophe model of substorms, *J. Geophys. Res.* 94, 6581, 1989.
- Huang, C. Y. *et al.*, Observational determination of the adiabatic index in the quiet time plasma sheet, *Geophys. Res. Lett.* 16, 563, 1989.
- Terasawa, T. and M. Nambu, Ion heating and acceleration by magnetosonic waves via cyclotron subharmonic resonance, *Geophys. Res. Lett.* 5, 357, 1989.

1990

- Ashour-Abdalla, M. *et al.*, Chaotic scattering and acceleration of ions in the earth's magnetotail, *Geophys. Res. Lett.* 17, 2317, 1990.
- Baker, D. *et al.*, The evolution from weak to strong geomagnetic activity: an interpretation in terms of deterministic chaos, *Geophys. Res. Lett.* 17, 41, 1990.
- Büchner, J., and L. M. Zelenyi, The separatrix tentacle effect of ion acceleration to the plasma sheet boundary, *Geophys. Res. Lett.* 17, 127, 1990.
- Chen, J. *et al.*, Observational signatures of nonlinear magnetotail particle dynamics, *Geophys. Res. Lett.* 17, 2237, 1990.
- Chen, J., *et al.*, Differential memory in the trilinear model magnetotail, *J. Geophys. Res.* 95, 15141, 1990.

- Chen, J., *et al.*, Fractal boundaries in magnetotail particle dynamics, *Geophys. Res. Lett.* 17, 1049, 1990.
- Hada, T. *et al.*, Chaos in driven Alfvén systems, *Phys. Fluids B2*, 2581, 1990.
- Horton, W., and T. Tajima, Decay of correlations and the collisionless conductivity in the geomagnetic tail, *Geophys. Res. Lett.* 17, 123, 1990.
- Karimabadi, H., *et al.*, Particle orbits in two-dimensional equilibrium models for the magnetotail, *J. Geophys. Res.* 95, 17153, 1990.
- Lanzerotti, L. J. and A. Hasegawa, Comment on "Ion heating and acceleration by magnetosonic waves via cyclotron subharmonic resonance" by T. Terasawa and M. Nambu, *Geophys. Res. Lett.* 2, 191, 1990.
- Vassiliadis, D.V. *et al.*, Low-dimensional chaos in magnetospheric activity from AE time series, *Geophys. Res. Lett.* 17, 1841, 1990.
- Zelenyi, L. M. *et al.*, Ion precipitation from the inner plasma sheet due to stochastic diffusion, *J. Geophys. Res.*, 95, 3871, 1990.

1991

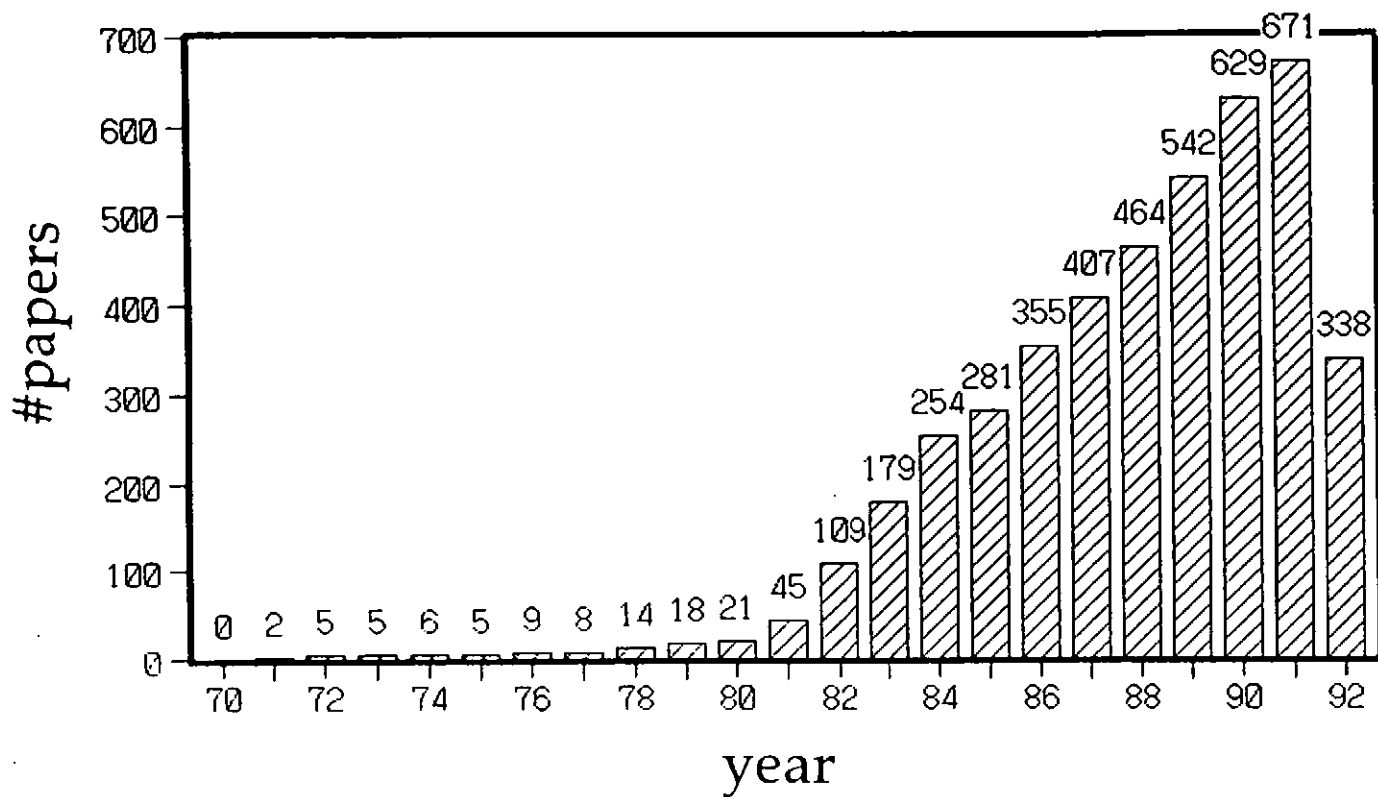
- Ashour-Abdalla, M. *et al.*, The quasi-adiabatic ion distributions in the central plasma sheet and its boundary layer, *J. Geophys. Res.* 96, 1601, 1991.
- Ashour-Abdalla, M. *et al.*, Large and small scale structures in the plasma sheet: A signature of chaotic motion and resonance effects, *Geophys. Res. Lett.* 18, 1603, 1991.
- Ashour-Abdalla, M. and D. Baker, Chaos and stochasticity in space plasmas, *Geophys. Res. Lett.* 18, 1573, 1991.
- Baker, D. *et al.*, Examination of time variable input effects in a nonlinear analogue magnetosphere model, *Geophys. Res. Lett.* 18, 1631, 1991.
- Brittnacher, M. J. and E. C. Whipple, Chaotic jumps in the generalized first adiabatic invariant in current sheets, *Geophys. Res. Lett.* 18, 1599, 1991.
- Büchner, J., Correlation modulated chaotic scattering in the earth's magnetosphere, *Geophys. Res. Lett.* 18, 1595, 1991.
- Burkhart, G. R., and J. Chen, Differential memory in the earth's magnetotail, *J. Geophys. Res.* 96, 14033, 1991.
- Burkhart, G. R. *et al.*, Neutral line chaos and phase space structure, *Geophys. Res. Lett.* 18, 1591, 1991.
- Büchner, J., Correlation-modulated chaotic scattering in the earth's magnetosphere, *Geophys. Res. Lett.* 18, 1595, 1991.
- Burlaga, L. F., Multifractal structure of the interplanetary magnetic field: Voyager 2 observations near 25 AU 1987-1988, *Geophys. Res. Lett.* 18, 69, 1991.
- Burlaga, L. F., Multifractal structure of speed fluctuations in recurrent streams at 1 AU and near 6 AU, *Geophys. Res. Lett.* 18, 1651, 1991.
- Burlaga, L. F., Intermittent turbulence in the solar wind, *J. Geophys. Res.* 96, 5847, 1991.
- Cros, B. *et al.*, Laboratory simulation of ionospheric heating experiment, *Geophys. Res. Lett.* 18, 1623, 1991.
- Goertz, C. K. *et al.*, Chaos in the plasma sheet, *Geophys. Res. Lett.* 18, 1639, 1991.
- Holland, D. L. and J. Chen, Effects of collisions on the nonlinear particle dynamics in the magnetotail, *Geophys. Res. Lett.* 18, 1579, 1991.
- Horton, W., and T. Tajima, Collisionless conductivity and stochastic heating of the plasma sheet in the geomagnetic tail, *J. Geophys. Res.* 96, 15811, 1991.
- Horton, W. *et al.*, Collisionless plasma transport across loop magnetic fields, *Phys. Fluids B3*, 2192, 1991.
- Horton, W. *et al.*, Stochastic mixing of protons from chaotic orbits in the nightside geomagnetosphere, *Geophys. Res. Lett.* 18, 1575, 1991.
- Karimabadi, H. and C. R. Menyuk, A fast and accurate method of calculating particle diffusion: application to the ionosphere, *J. Geophys. Res.* 6, 9669, 1991.
- Klimas, A. J. *et al.*, Linear prediction filters for linear and nonlinear modeled geomagnetic activity, *Geophys. Res. Lett.* 18, 1635, 1991.
- Lewis, Z. V., On the apparent randomness of substorm onset, *Geophys. Res. Lett.* 18, 1627, 1991.
- Liu, W. W., Chaos driven by kinetic Alfvén waves, *Geophys. Res. Lett.* 18, 1611, 1991.

- Lin, Y. and L. C. Lee, Chaos and ion heating in a slow shock, *Geophys. Res. Lett.* 18, 1615, 1991.
- Roberts, D. A. *et al.*, Indications of low dimensionality in magnetospheric substorms, *Geophys. Res. Lett.* 18, 151, 1991.
- Roberts, D. A., Is there a strange attractor in the magnetosphere? *J. Geophys. Res.* 96, 16031, 1991.
- Savenkov, B. V. *et al.*, Regular and chaotic aspects of charged particle motion in a magnetotail-like field with a neutral line, *Geophys. Res. Lett.* 8, 1587, 1991.
- Schrifer, D. and M. Ashour-Abdalla, Consequences of wave-particle interactions on chaotic acceleration, *Geophys. Res. Lett.* 18, 1607, 1991.
- Shan, L-H. *et al.*, Chaotic appearance of the AE index, *Geophys. Res. Lett.* 18, 147, 1991.
- Shan, L-H. *et al.*, On the embedding-dimension analysis of AE and AL time series, *Geophys. Res. Lett.* 18, 1647, 1991.
- Sonmor, L. J. and J. G. Laframboise, Chaotic particle motion in Coulomb electric and uniform magnetic fields, *Geophys. Res. Lett.* 18, 1619, 1991.
- Vassiliadis, D. *et al.*, Lyapunov exponent of magnetospheric activity from AL time series, *Geophys. Res. Lett.* 18, 1643, 1991.

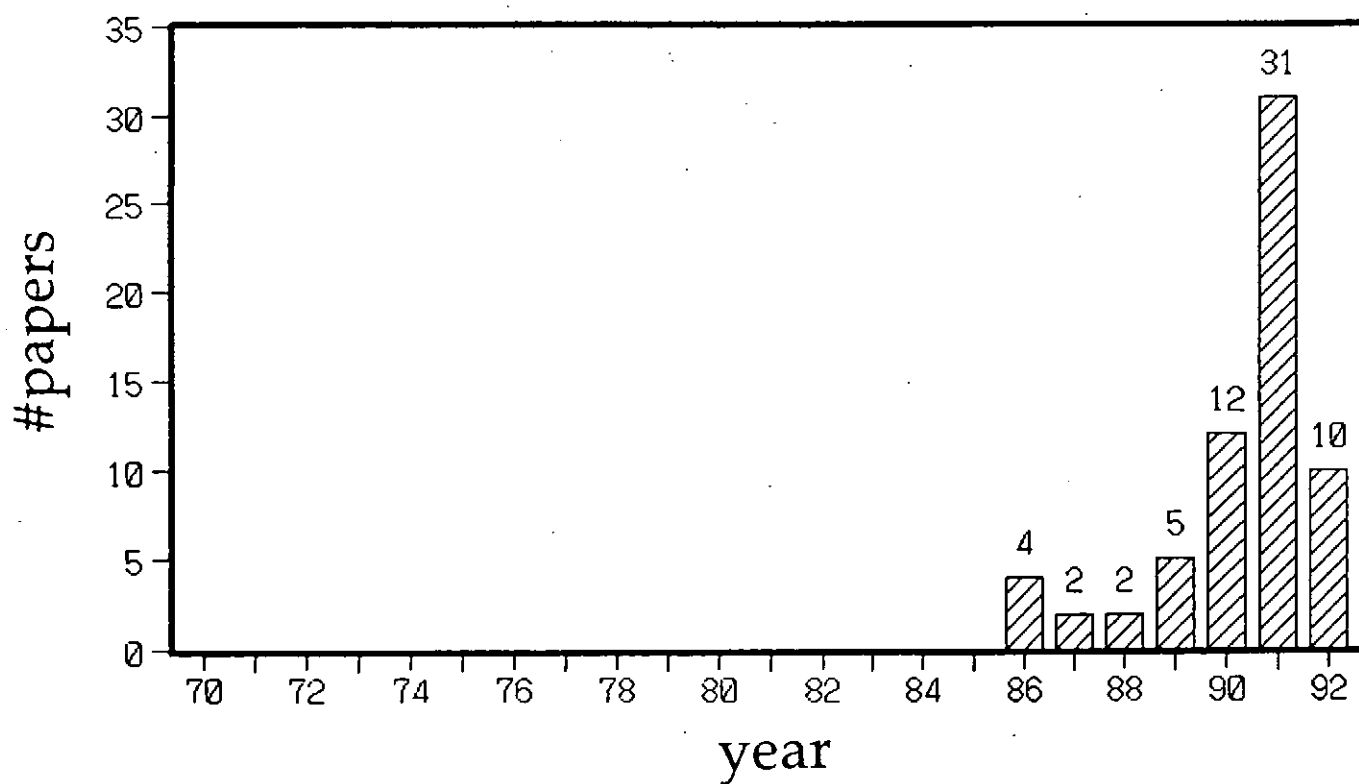
1992.

- Burkhart, G. R., and J. Chen, Chaotic scattering of pitch angles in the current sheet of the magnetotail, *J. Geophys. Res.* 97, 6479, 1992.
- Burkhart, G. R., and J. Chen, Particle motion in x-dependent Harrislike magnetotail models, *J. Geophys. Res.*, in press, 1992.
- Burlaga, L. F., Multifractal structure of the magnetic field and plasma in recurrent streams at 1AU, *J. Geophys. Res.* 97, 4283, 1992.
- Buti, B., Chaotic Alfvén waves in multispecies plasmas, *J. Geophys. Res.* 97, 4229, 1992.
- Chen, J. Nonlinear dynamics of charged particles in the magnetotail, *J. Geophys. Res.* 97, 15011, 1992.
- Holland, D. L., and J. Chen, On chaotic conductivity in the magnetotail, *Geophys. Res. Lett.* 19, 1231, 1992.
- Klimas, A. J., *et al.*, A nonlinear dynamical analogue model of geomagnetic activity, *J. Geophys. Res.* 97, 12253, 1992.
- Lee, N. C. and G. K. Parks, Chaotic structures of nonlinear magnetic fields, I theory, *Geophys. Res. Lett.* 19, 637, 1992; *ibid.*, II numerical results, *Geophys. Res. Lett.* 19, 641, 1992.
- Prichard, D. and C. P. Price, Spurious dimension estimates from time series of geomagnetic indices, *Geophys. Res. Lett.* 19, 1623, 1992.
- Wallen, H. P., On Arnol'd diffusion in a perturbed magnetic dipole field, *Geophys. Res. Lett.* 19, 941, 1992.

chaos



chaos + space physics



非線形細胞膜系と比較したプラズマ=シース系

大阪府立大学総合科学部
(〒593堺市学園町1丁1番)

谷塚 昇

1. はじめに

理想プラズマのイメージとして、境界が無く構造が無く、しかも気体より高いエネルギー状態であるため、等量の電子・イオンがひしめきあって、電磁的・衝突非衝突的な多数の事象が発生している物質、という考えを持つ。そこにはエネルギーや粒子の力学的相互作用の概念が入っているが、情報の発生や伝達に関する考えは入っておらず、その理論から構造の生成（自己組織）など、現実のプラズマで普通に見られる現象が帰結しない。¹⁾これは非構造線形近似と言われる。非構造線形の意味を情報の尺度であるエントロピーの言葉で説明する。²⁾

プラズマで生起する事象数を N とする。その中の一事象の確率を p_n とすれば $\sum p_n = 1$ (Σ : についての和)。エントロピーは $H = -\sum p_n \log p_n$ である。どんな波も励起しない時（白色雑音）、 $N \rightarrow \infty$ で等確率に生起するから $p_n = 1/N$ 従って $H = \log N \rightarrow \infty$ 。線形波で励起する時（例えば $\sin \omega t$ ）、決定論的波であるので $p_n = 1$ 、 n 番目以外の確率は 0。従って $H = \log 1 = 0$ 。前者は非構造を表し、後者は情報の流れが無く構造を発生しない事を示している。理想プラズマとはエントロピーの両極端での話である。

現実のプラズマは、エネルギーや粒子の流れとともに、情報の発生・流れがあり、構造の形成・維持がある。プラズマを、情報回路を有する一つの系とする視点に移して考えなければならない。

2. 現実のプラズマ

実験室または天体のプラズマは、始めから存在するものでなくて、エネルギーが与えられて生成されるものであって、必ずその端あるいは境界領域、または他の種のプラズマや物質との interface が在る（図 1）。¹⁾境界領域は非線形の性質を帯び、物質・エネルギー・情報の流れが存在する場所である。その場所は構造の発生の場所であり、非決定論的・確率的な法則が支配している。現実のプラズマの系の概念を図 2 に示す。情報理論（サイバネティクス）の言葉を使うと、図 2 の境界領域はプラズマの系の中で「制御器」の役目を果たす。アルペーンはダブルレーヤ（シース、図 2 の境界領域）では雑音・ゆらぎ現象が必ず付随すると主張している。³⁾この主張は「制御」の意味する「あるシステムにおいて、その系の真値（系を安定に維持するための最適値）を目指す努力である」という概念に通じるものである。また彼は、プラズマにおけるダブルレーヤは、細胞における細胞膜（プラズマ・メンブレン、セル・メンブレン）とその機能において類似しており、いずれもプラズマの生成物でありプラズマの生成・維持・外部環境からの保護のために無くてならないものである、と主張している。³⁾膜に関する相互の機能・現象を追跡すると、表 1

のように面白い程の相似点が見いだされる。^{4, 5)} 細胞の系において生起する現象は、非線形系の典型的な現象である。神経細胞の膜に関する神経生理学・分子生物学・情報（計算機）科学からの研究が進んでおり、その知識を概観するとともに、相似しているプラズマ系の現象について異なる領域の視点から考察を進める事は意義ある事と思われる。

3. 細胞膜電位の形成⁶⁾

細胞膜は物理的拡散により水や非極性分子を通すが、イオン等の極性分子は膜に埋め込まれた蛋白質によって選択的に輸送される。そのうちイオンチャンネルやイオンポンプにより行われるイオンの選択的膜輸送が、細胞膜電位の形成に寄与している。図3(a)のMに埋め込まれたNa⁺-K⁺ATPアーゼ（酵素蛋白質、イオンポンプ）によって、図3(a)の細胞内CのNa⁺が細胞外Lに排出され、細胞外LのK⁺が細胞内Cに汲み入れられている。その結果、細胞内外でNa⁺とK⁺に関する濃度差が発生している。表2に生物細胞の濃度差の例を示す。信号の伝達・処理を役目とする神経細胞では、膜電位の分極・脱分極（後述）が激しいため、全細胞エネルギーの70%が濃度差を維持するためにNa⁺-K⁺イオンポンプで消費される。細胞膜にはイオンを通すイオンチャンネルも埋め込まれており、その代表がK⁺を通すK⁺イオンチャンネルとNa⁺を通すNa⁺イオンチャンネルである。細胞の普通の状態では、K⁺がリークスルーで、Na⁺は通過出来ない（図3(b)）。従って、K⁺の拡散がCからLの方向に起こり、正イオンの流出による電位勾配が発生し、発生電場がK⁺イオン流出を阻止する力と釣り合う平衡電位Φが決る。Φはネルンストの式

$$\Phi = \frac{RT}{ZF} \ln \frac{C_{i1}}{C_i} \quad (1)$$

$$R=8.314 \text{ J}\cdot\text{mol}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}, F=9.648\cdot 10^4 \text{ C}\cdot\text{mol}^{-1}, T=300^\circ \text{ K}, Z=1$$

C_i :細胞内イオン濃度, C_{i1} :細胞外イオン濃度

で決る。細胞膜電位は細胞外を基準にした細胞内の電位である。K⁺がリークスルー状態の電位を静止電位Φ_sと呼び、-80mV程度である。細胞膜の厚みは約80Åのストロームであるから、電場強度は10⁵V/cmという大変大きな値になる。外部磁場の無いプラズマのシース電位は電子温度と密度によって、プラズマ端からの電子の拡散で決るが、上記の静止電位の決り型と良く似ている。神経軸索における細胞膜静止電位の周波数スペクトルについての観測結果が報告されたが、静止電位はゆらいでおり、そのパワースペクトルは1000Hzから0.1Hzの周波数範囲でフリッカ雑音(1/fノイズ)である。^{7, 8)} 神経生理学的な実験観察の結果、フリッカ雑音の発生は、K⁺イオンの流束と関係がある、と報告された。⁸⁾

個々のイオンチャンネルの総数が、膜を通過するイオン流に対するコンダクタンスを形成する。一個のイオンチャンネルに対し、イオンゲートという概念が実験により確立しており、ゲートは開(ON)か閉(OFF)の二状態をとり、ゲート開において長時間開状態が存在すると考えてはならず、ある瞬間開となり閉状態に戻り次の開状態を待たなければならない。従って、ある瞬間、ゲート100個の中で何個のチャンネルが開状態であるか、という

ようにチャンネルゲートの開確率という考え方が現れる。「開」の事象は「電離」の事象と対応している。イオンチャンネルのゲート開確率は、イオンチャンネルを刺激するイオンの種類（イオン種選択）、膜電位、イオン濃度、履歴（開を経験したか）の関数である。Na⁺チャンネルの場合の開確率の例を膜電位を横軸にとりて図4に示す。この場合、膜電位が敷居値 Φ_{th} 以上になると、確率が急激に増す。Na⁺チャンネルに何らかの刺激が加わりゲートが開くとNa⁺が細胞内に流入し膜電位を増加させる。または他の原因で膜電位が Φ_{th} に達すると、Na⁺チャンネルゲート開確率 >0 となり、Na⁺が細胞内に流入し膜電位が増加し、これによって更に開確率が増加する。すなわち正のフィードバック状態となる。Na⁺チャンネルはゲート開の後、一定時間不応期の状態に入り、膜電位が Φ_{th} 以上であっても開確率は0である。このようにNa⁺チャンネルのコンダクタンスは非線形性を持ち、膜電位がパルス電位を発生する要因となる。急峻なパルス電位の発生にはK⁺チャンネルのコンダクタンスも非線形性を持つことに注意する。

Na⁺チャンネルのゲート開確率最大の時の電位は、Na⁺に対する(1)式から求められる。この電位を活動電位 Φ_N と呼び、+50mV程度である(図3(c),表2参照)。

静止電位、活動電位、敷居値、パルスの関係を図5に示す。神経生理学では静止電位の状態を分極、分極状態を脱することを脱分極と呼ぶ。

ある種類の神経細胞では、パルスが自励発振してパルス列を作る。巨大ニューロンを取り出し生理溶液に浸し、図6のようにガラス電極(マイクロピペット)で細胞膜を貫通し、膜電位を観測する。このとき安定なスパイク放電が発生し、パルス列が観測された。パルス列をFFTで周波数解析すると、パルス列は0.1Hzから10⁻⁴Hzの周波数範囲で1/fノイズでゆらいでいることが明らかにされた。⁹⁾

発火しない神経細胞(静止電位)の膜電位のゆらぎも、発火する神経細胞(自励発振パルス列)の膜電位のゆらぎも、観測された周波数領域は異なるが、1/fのパワースペクトル密度の特性を持っている。

細胞膜を通過する電流の式を下式に示す。

$$\sum g_i (\Phi - \Phi_i) + I_p + I_L = 0 \quad (2)$$

Σ : $i=K^+, Na^+$ の和、 g_i : i イオンに対する膜コンダクタンス

Φ : 細胞膜電位、 Φ_i : i イオンに対する平衡電位

I_p : イオンポンプ電流、 I_L : リーク電流

I_p 、 I_L は(2)式 Σ の項に比べて、小さい。従ってNa⁺に対するコンダクタンスが0である静止状態の電位は $\Phi = \Phi_i$ ($i=K^+$ 、静止電位)でなければならない。スパイク放電時の頂点、即ち、Na⁺に対するコンダクタンスが大きく主流になる状態の電位は $\Phi = \Phi_i$ ($i=Na^+$ 、活動電位)でなければならない。観測値はそれを証明するものとなっている。

静止電位、パルス列電位の両方にみられる Φ の雑音ゆらぎは(2)式の非線形コンダクタンスが原因であると推測できる。実験によると、静止電位は平衡電位より少し上で、静止電位のゆらぎ雑音(1/fスペクトル)のパワーは、軽度の脱分極(静止電位より+10mV)、通常分

極 (+0mV)、軽度過分極 (静止電位より -10mV) の順に小さくなり、極度過分極 (静止電位より -20mV) で白色になる。文献(8)の著者は、1/fスペクトルはK⁺イオン流束に関係がある、としている。

細胞の静止状態、発火状態におけるイオン流の様子を図7に示す。(a)の静止状態では、K⁺が細胞膜に埋め込まれたカリウムチャンネルのON-OFFのON状態に通過する。ON状態は確率的な事象で、プラズマのシース部での電離の事象やシース電位を越えるエネルギーを持った電子やイオンがたまたまシースに向かって入りシース部を通過する事象に対応する。

(b)の発振状態では、静止電位の状態と、何かの原因でナトリウムチャンネルが開き正フィードバックと活動電位状態、それに続くカリウムチャンネルによる電位降下促進、ナトリウムチャンネルの不活性状態に続く静止電位の状態への帰還、という複雑な過程がある。にもかかわらず膜電位のゆらぎ雑音は、(a)と同じ1/fスペクトルである。(b)では敷居値が存在しこれを越えたとなだれ現象 (正フィードバック) が起こる。イオンチャンネルの非線形性により、なだれを制御する機構も付随しているので安定なパルス列の発生を可能にしている。敷居値から1. プラズマ放電の電離電圧、2. 磁場が持つ高温高密度プラズマにおける磁場・外部磁場・密度・温度の相互関係で決る敷居値の存在と磁場・密度・温度ゆらぎ、が連想される。特に2. の敷居値の前後での正のフィードバックと抑制現象があれば、スパイク列のような発振がプラズマシステムで起こる、と期待できる (プラズマシステムの発振現象)。

4. マグネトロン放電セルと電位構造形成

図8に実験に用いた装置の概略を示す。¹⁰⁾ 装置は同軸円筒型の単純マグネトロンである。カソードはタンタル熱陰極 (直径0.5mm) で、陽極内径は60mmである。陽極の周囲は軸方向磁場を供給するためのソレノイドを配置している。図の探針 (プローブ) は周波数解析機の高抵抗を通して接地されている。従ってプローブへは最初イオンが流入し、プローブ電位ががある程度高くなると高いエネルギーの電子も流入するが、プローブ電位は、およそプローブ付近の空間電位で平衡すると考えられる。実験では、放電セルで放電が起こった時のプローブ電位のゆらぎ雑音を観測する。電子マグネトロンの場合、磁界によって径方向に流れる電子流がカットオフされる磁界電流の条件は良く知られているように、

$$I_{sc} = C_0 \sqrt{\frac{U}{r_s^2 - r_c^2}} \quad (3)$$

C_0 : 比例定数、 U : 陽極電圧、 r_s : 陽極半径、 r_c : カソード半径

である。特定のガスを管内に入れる前には磁界電流 $I_s \cong I_{sc}$ で電子流がカットオフされることが観測された。通常のマグネトロンの場合、この条件で磁場に閉じ込められた電子の位置エネルギーがマグネトロン電子回路での発振エネルギーに変換され、電磁波エネルギーの形で外部に放出するように工夫されている。特定のガスを放電管内に入れると、カットオフ条件 $I_s \cong I_{sc}$ から放電が開始され、放電電流 ΔI が流れ、更に強い磁界電流 I_{sc}' でカットオフする。これらの様子を図9に示す。マグネトロン放電では、電子の位置エネル

ギーがマグネトロン放電回路での放電エネルギーに変換されたことになるが、その経緯について筆者は既に解明した。¹¹⁾ ΔI がある程度の値になると雑音ゆらぎが発生する。¹²⁾ 図10に観測例を示す。^{10, 13)} 周波数スペクトルは、パワースペクトル表示で例外なく

$$P(f) = C \cdot f^{-\alpha}$$

の形となる。¹⁰⁾ ただしCは定数、 α はスペクトル指数である。 α は放電電流 ΔI の関数となりアルゴリズムを使った実験でガス圧力0.07Paで陽極電圧 $U=200V$ 、 $0.2mA < \Delta I < 80mA$ において

$$2.9\alpha = \log_2 \frac{\Delta I}{\Delta I_0} \quad (\text{bit}) \quad (4)$$

$$\Delta I_0 = 1.5 \mu A$$

が実験式として与えられた。^{5, 13)} 上記放電電流範囲では $2.5 < \alpha < 5.5$ であった。

放電管内の電位降下 ϕ （シース部に相当し、放電ではシース部端で電離が励起される事が知られている）、その場所のコンダクタンスを g とすれば、当然 ϕ 、 g は(4)式の ΔI と隠れた相互関係を持っており、これらの関係は次のように定式化される。

$$\alpha \xrightarrow{\quad} \Delta I \xrightarrow{\quad} \phi \xrightarrow{\quad} g \quad (5)$$

上式は、ゆらぎが境界領域の電位降下とその部位のコンダクタンスと相関する事を示す。境界領域は、プラズマ放電系を創り維持するための重要な機能を担っており、系の制御部となっている事が明らかである。またその場所は、系を安定に維持するために、一種の計算を行っている、と見なすことが出来る。これは非線形計算系と言えるものである。¹⁴⁾

図2は、プラズマシースの系の安定が、境界領域における分極・ゆらぎ作用によって調節されており、本質的に非線形な系によって行われていることを示している。^{5, 14)}

前述の放電セルの実験で、電子マグネトロンから放電マグネトロンにすると、カットオフ磁界電流が増大すると同時にゆらぎ雑音が発生することを示した。磁界電流の増加は(3)式から結果的に、 r_s の減少(r_s' とする)又は r_s の増加(r_s'' とする)に対応し、図11に示すように、放電セルにプラズマシース構造が現れたこととなる。また前述の実験結果から、この構造の発生とゆらぎ雑音の発生は強い因果関係にある、と説明できる。放電セルにおけるプラズマとシースの領域は、未だ特定のできる測定を行っていないが、シース電位を ϕ 、シースの非線形コンダクタンスを g 、放電電流を Δi 、ポンプ電流(に相当する電流)を i_p として、細胞膜に対する式(2)とのアナロジーから放電セルに対する非線形の式

$$\Sigma g \phi + i_p + \Delta i = 0 \quad (6)$$

が与えられる。^{4, 5)} g は種類の異なる荷電粒子に対するコンダクタンス、 i_p はエネルギーを持った荷電粒子で放電回路の等価電池によって供給される。経験式である ϕ の $f^{**(-\alpha)}$

ゆらぎと(4)式の関係は、(6)式を束縛するものである。(6)式の変数の相互関係を図示する(図12)。図の非線形系は、 $\Delta I, \phi, g, i_p$ の相互関係を保ちながら安定な、ある構造を持つ系として存在し、その時、ゆらぎ α を発生(又は放出)している、と解釈できる。 i_p によって系に事象を起こすためのエネルギーが注入され、 ΔI は電離事象を示し、 ϕ はその時の電位構造を示し、 g は電子又はイオンのコンダクタンスを示す。これらの変数はすべて相互に連動しており、その中の一つが微小な変化をすると、変化は他の変数に伝播し一巡する。そして系は最も安定な位置を選ぶはずである。この安定の為の微小な変化が、ゆらぎとして、系外から検出されなければならない。筆者はこの検出されたゆらぎが、ゆらぎ α であると考えている。

5. まとめ

線形な現象の問題は、一意的な時間の関数として解決できる(直列逐次処理可能)。これに対して、非線形な現象は、確率論的な要素が入り、系を前提とした問題として取り扱う必要がある。そこでは、エネルギー・荷電粒子の流れの他、情報の発生と伝播の概念が入り、系の構造の概念が生まれてくる。自然界には誤差論における「真値」は実在しないが、「真値」のまわりに分散している(時間の言葉では、ゆらいでいる)確率論的な値は実在する(観測値)。研究では、自然に存在するプラズマや実験室で生成するプラズマを、構造を持つ非線形な系の一部として考察した。系では境界領域であるプラズマシースが非線形性と深く関係している。シースと生物細胞膜の現象との間に相似則が存在することを示し、これを視点として、プラズマ=シース系について検討した。

マグネトロン放電セルの実験によって、プラズマ=シース系の発生とパワースペクトルが $f^{**}(-\alpha)$ 型の雑音ゆらぎの観測が相互関係を持つことを示し、放電系において雑音ゆらぎの発生は、構造の発生と深く関係することを示唆した。ゆらぎは非線形放電系のエネルギーのとりこみ方、放電電流、電位構造、コンダクタンスと相互作用しながら、系を安定に生成・維持させるための手段として捉えた。コンダクタンスが主な意味を持つシース部(プラズマと外部の境界領域)が、 α ゆらぎ情報の発生源であると考えられる。シース部を制御器と考え、系がもつ非線形計算原理はどのようなものか検討を進めて行きたい。

参考文献

- 1) 谷塚 昇: 核融合における周辺プラズマ対向壁間相互作用研究会報告集, 高村秀一編, 科研費 総合研究(B), pp. 157-166 (1991年2月).
- 2) Abramson N. 著, 宮川 洋訳: Information Theory and Coding (情報理論入門), McGraw-Hill Inc., New York (1963) (好学社, 昭61).
- 3) Alfvén H.: Double Layers and Circuits in Astrophysics, TRITA-EPP-86-4, R.I.T., Stockholm (1986).
- 4) 谷塚 昇: プラズマ核融合学会第8回年会予稿集 p. 32 (1991年3月), 同 第9回年会予稿集 p. 72 (1992年3月).
- 5) 谷塚 昇: プラズマ対向壁複合系における粒子輸送制御研究会報告集, 高村秀一編, pp. 28-33 (1992年2月).
- 6) B. Alberts et al. 著, 中村桂子他監訳: THE CELL (細胞の分子生物学), Garland Pub. Inc., New York (1983) (教育社, 1985).
- 7) Verwee A.A. and Derksen H.E.: Kybernetik vol. 2, no. 4, pp. 152-160 (1965).
- 8) Derksen H.E. and Verwee A.A.: Science, 151, pp. 1388-1389 (1966).
- 9) Musha T. et al.: IEEE Trans. Biom. Eng. BME-30, pp. 194-197 (1983).
武者利光: 応用物理 vol. 54, pp. 429-435 (1985).
- 10) Tanizuka N.: Jpn. J. Appl. Phys., 30, pp. 171-177 (1991).
- 11) 谷塚 昇: 電子情報通信学会論文誌 C vol. J70-C, no. 6, pp. 868-876 (1987).
- 12) Tanizuka N.: Proc. 7th Symp. on Plasma Processing, ed. T Kato and R. Itatani, RGPE of JSAP, Tokyo, pp. 489-492 (Jan, 1990).
- 13) Tanizuka N.: Proc. of Int. Seminar on Reactive Plasmas, ed. T Goto, OCISRP, Nagaoya Univ., pp. 121-124 (June, 1991).
- 14) Tanizuka N.: Forth Symp. on Double Layers and Other Nonlinear Potential Structures in Plasmas, ed. R. W. Schrittwieser, Innsbruck (July, 1992). in Proceedings to be published.

表1 プラズマ-シース系と細胞-膜系の相似則^{4, 5)}

	プラズマ	細胞
語源	plasma I. Langmuir 1928	plasma / protoplasm 原形質
系	物理非認識系	生物認識系
膜	sheath / double layer	cell membrane / plasma membrane
膜機能	周辺環境からplasmaを守り維持するためのplasma生成物	周辺環境から原形質を守り、生命を維持するための細胞生成物
担体	電子 / イオン	Na ⁺ イオン / K ⁺ イオン他
現象	分極 / 両極性拡散 I _{net} =0 / I _{net} ≠0の状態存在	分極 / 定常状態 I _{net} =0 / I _{net} ≠0の状態存在
膜輸送	物質 / エネルギー / 情報	物質 / エネルギー / 情報
膜電位	シース電位	細胞膜電位 (membrane potential)
電位揺	power spectrum 1/f ^α	power spectrum 1/f

表2 細胞内外のイオン濃度と電気化学的平衡電位

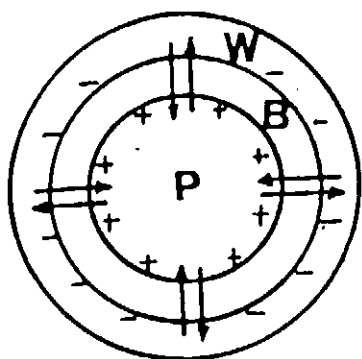
哺乳類

イオン	内 I (mM) [†]	外 II (mM) [†]	比 C _{II} /C _I	Φ (mV)
Na ⁺	5~15	145	29~9.7	+87~+59
K ⁺	140	5	0.036	-86

[†]イオン濃度は文献
「細胞の分子生物学から」⁶⁾

切り傷神経軸索

イオン	内 I (mM) [†]	外 II (mM) [†]	比 C _{II} /C _I	φ (mV)
Na ⁺	50	440	8.8	+56
K ⁺	400	20	0.05	-77



P : プラズマ
 B : 境界層
 W : 壁または周辺環境

現実のプラズマはboundaryや他とのinterfaceを持つ構造物であり、確率的な非線形なものに支配されてる状態である。その系には情報の流れがある。

図1 実在するプラズマ¹⁾

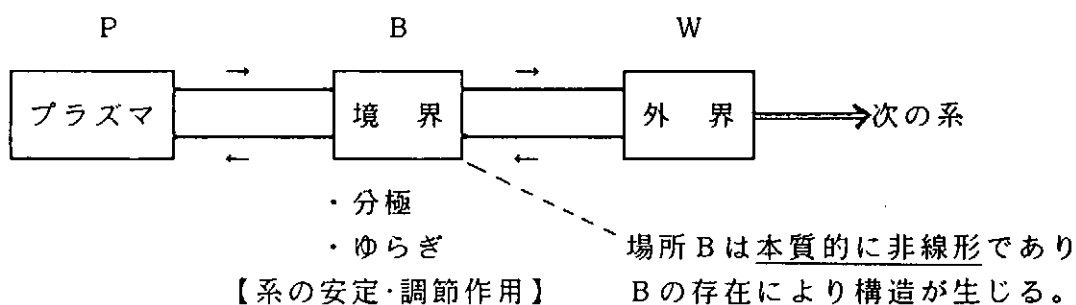
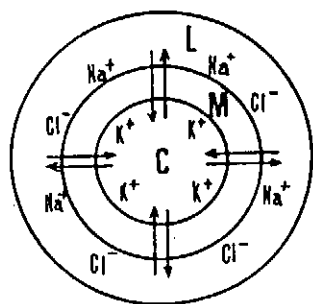
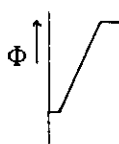
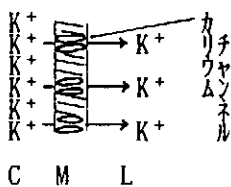


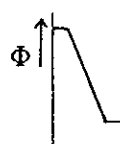
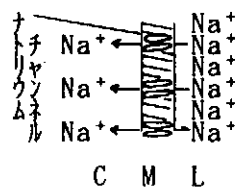
図2 プラズマースイスの系の安定な存在^{3, 5, 14)}



C : 細胞体
 M : 細胞膜
 L : 細胞外液
 (a) 系の構成¹⁾



(b) 静止電位状態



(c) 活動電位状態

図3 細胞と細胞膜の系

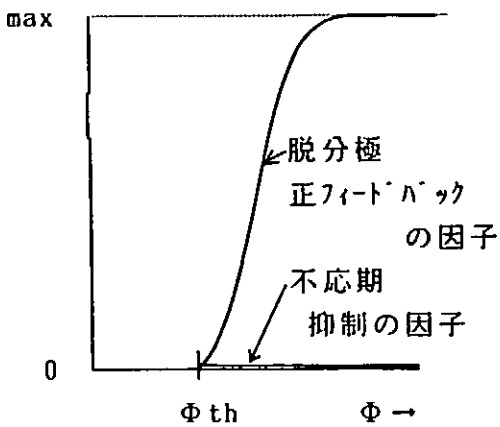


図4 Na⁺チャンネルゲート開確率 (膜コンダクタンスの非線形性)⁶⁾

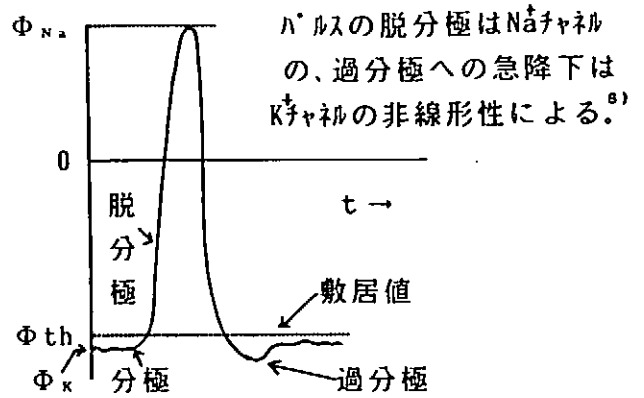


図5 分極・脱分極・敷居値と電位パルスの関係

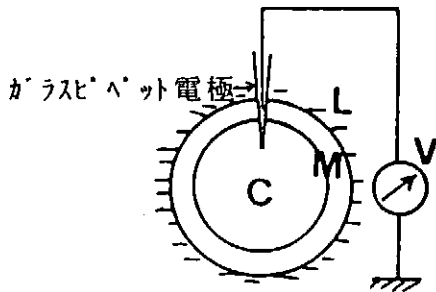


図6 細胞膜電位計測

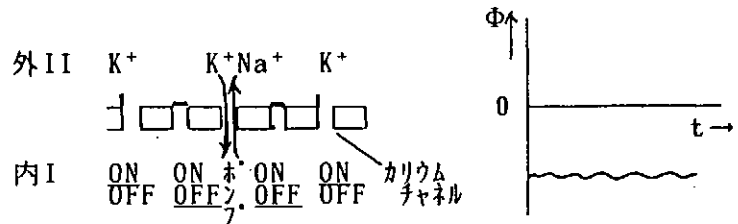


図7 (a) 発火しない神経細胞 (静止電位)

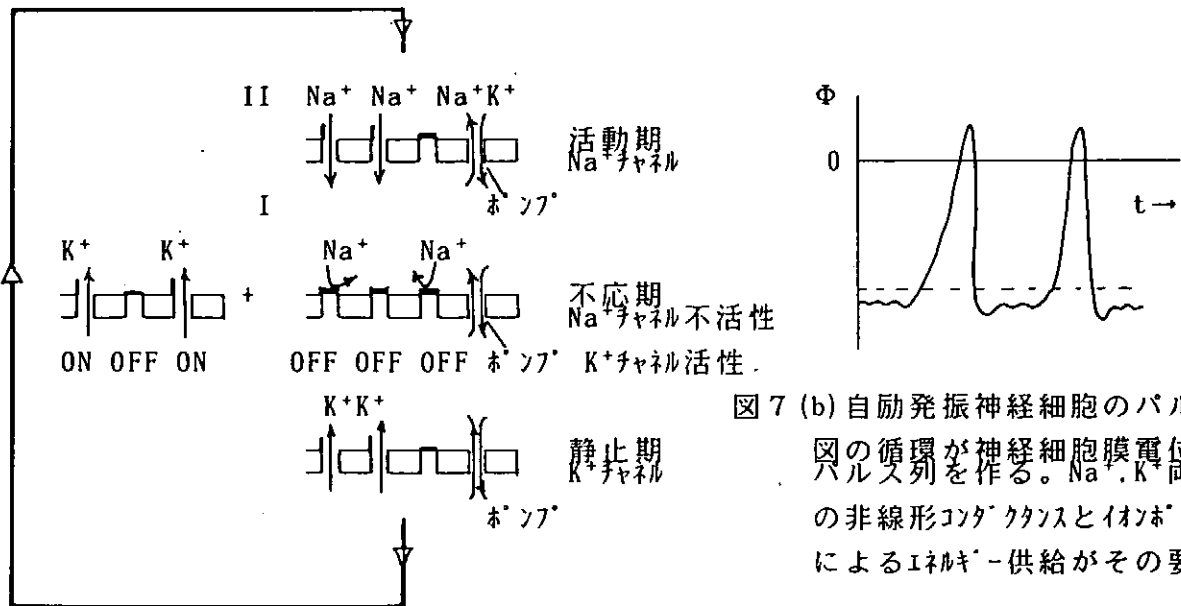


図7 (b) 自励発振神経細胞のバルス列
図の循環が神経細胞膜電位のバルス列を作る。Na⁺・K⁺両チャンネルの非線形コンダクタンスとイオンポンプによるエネルギー供給がその要因。

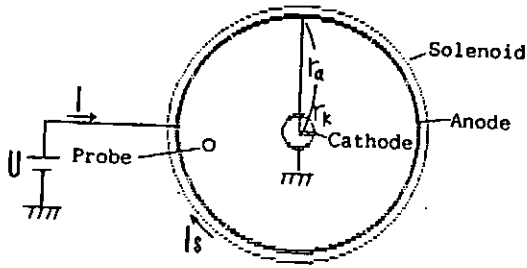


図8 熱陰極マク補ロソ放電セル¹⁰⁾
ソリノイド電流で軸方向磁界を供給

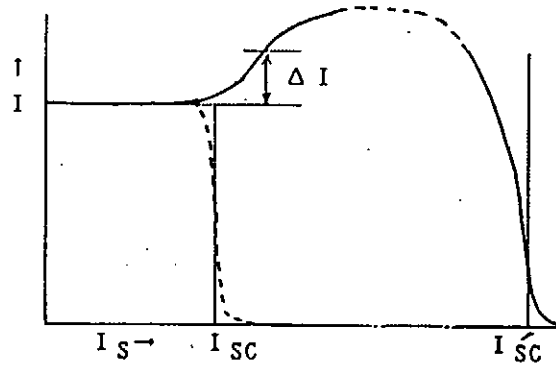


図9 磁界電流変化による陽極電流変化
 I_{sc} : 電子マク補ロソの場合に陽極電流が
カットされる磁界電流
 I_{sc}' : 放電セルの場合のカット磁界電流
放電電流 ΔI が流れるとき雑音ゆらぎを
検出した。

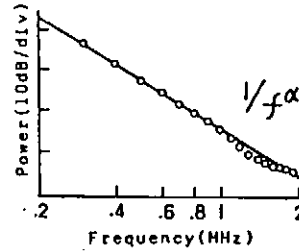
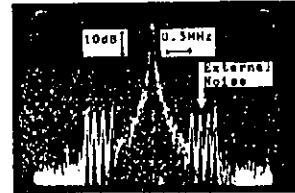
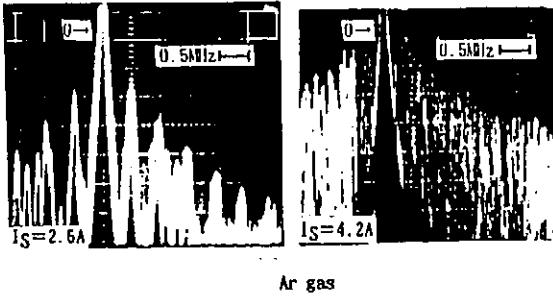
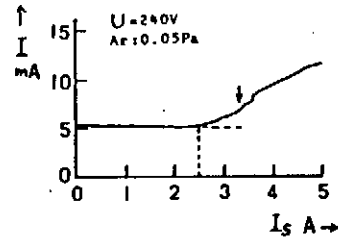
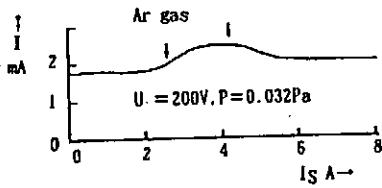


図10 放電セルにアルゴンガスを導入し動作させた時の磁界電流-陽極電流の特性と
ゆらぎ雑音の検出例。雑音のパワースペクトルは $1/f^{**\alpha}$ 特性を示す。^{3, 10)}

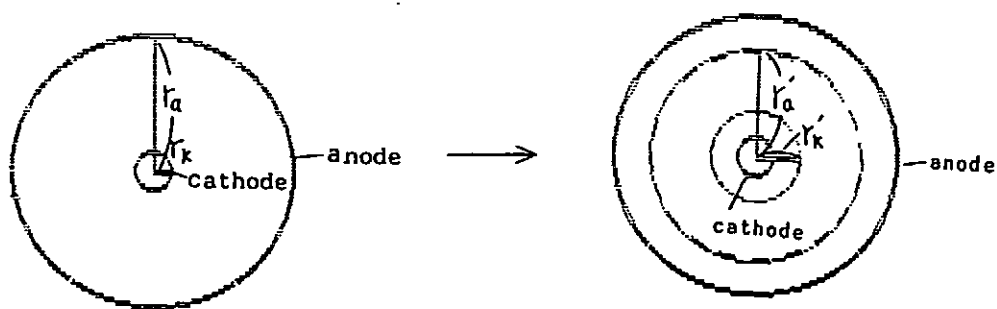


図 1 1 電子が補印から放電域への変化とゆらぎ雑音検出および構造生成
 最初、陽・陰極半径がそれぞれ r_a, r_k であったものが放電状態において r_a', r_k'
 ($r_a' < r_a$ and/or $r_k' > r_k$)と推移することがカット磁界電流の変化または消滅
 から解る。雑音発生と同時に放電域に新たに電位構造が形成されている。¹⁴⁾

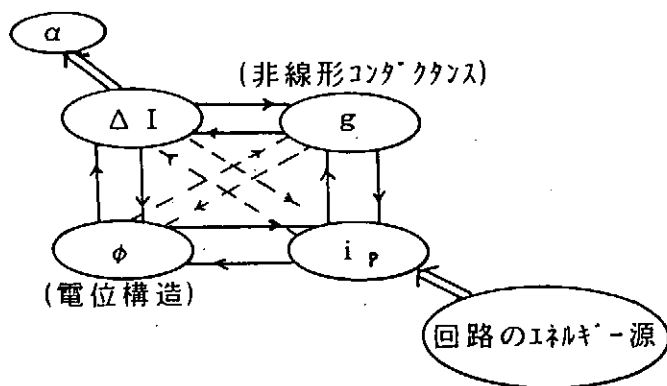


図 1 2 プラズマ放電系の非線形モデル

九大総理工 小森彰夫、田中慶雅、河合良信
九大応力研 河野光雄

1. はじめに

これまでの研究により、イオンシースに関連したカオス現象の全容がほぼ明らかとなった。カオスに到るルートとしては、周期倍分岐ルートと準周期ルートの2つのルートが見いだされた。間欠性は、周期運動からカオス状態に遷移するときではなく、静止状態から周期運動に遷移するときに観測された。理論的検討も行われ、周期倍分岐ルートは、イオンがチャイルドラングミュア則で表されるイオンシースに補足されたときに発生することが明らかとなった。また、準周期ルートもこのモデルで定性的に説明できることが分った。

2. 実験結果

実験はメッシュで仕切られたダブルプラズマ装置の片側に密度の高いプラズマを生成することによって行った。このプラズマ中に置いたステンレス製の円板とメッシュの間に円板が正、メッシュが負となるように直流電圧を印加し、直流電流を流す。このとき、直流電流 I_0 、印加電圧 V_0 及びメッシュ全面のイオンシースの幅 d の間にはチャイルドラングミュア則が成り立っており、直流電圧及び直流電流はイオンシースの幅を制御する働きをしている。

A. 間欠性

プラズマの密度を一定にして印加電圧 V_0 を上げていくと通常不安定性が励起される¹⁾。メッシュと円板間の密度が比較的高い場合、この安定状態から周期運動への遷移時に間欠性が観測される²⁾。メッシュの裏側のプラズマのポテンシャルがメッシュと円板間のポテンシャルより数V高いときに不安定性が励起されること、不安定性の周波数 f_0 は $(eV_0/m_i)^{1/2}/d$ に比例しておりシースにおけるイオンの通過時間に関係していること等から、不安定性はイオンシースにおける反射イオンのバンチングにより発生するものと思われる^{1, 3)}。図1は、間欠性の発生するしきい値 V_m が ~ 7.6 Vの例を示している。 V_0 が高い方から V_m に近づくと、バーストが起りにくくなり V_m より低い値ではバーストが発生していない。遷移時に0になるのは、バーストの振幅でもバーストの持続時間でもなく、平均的な周波数であることが分る。図2はパワースペクトルを示しており、図1に対応している。この図から、時系列に間欠性が認められる信号のパワースペクトルには $1 < f < 100$ kHz の領域に $1/f$ ノイズが発生していることが分る。このように間欠性の性質を詳しく調べた結果、ファーストリターンマップを除き、本研究で観測された間欠性は、タイプ-1と呼ばれる周期運動からカオスへの遷移時に見られる間欠性と同じ性質を持っていることが明らかとなった²⁾。

B. 準周期ルート

前節で述べた不安定性が励起されているとき、メッシュに振幅の小さい外部周期振動を加えると準周期状態となる。これを図3に示す。この図では、不安定性の周波数 f_0 を200 kHzに固定し、外部振動の周波数 f_1 を100 kHzから200 kHzまで変えている。A、B、Cで示した振動は、 f_0 と f_1 の線形結合により生じたもので $f = m_0 f_0 + m_1 f_1$ の関係を満たしていることが分る。ここで、 m_0 と m_1 は整数を表している。比 f_0 / f_1 を無理数に選び、外部振動の振幅 V_p を0 Vから徐々に大きくしていくと図4のような結果を得る⁴⁾。 $V_p = 3$ Vまでのスペクトルに見られる細かいピークは、全て f_0 と f_1 の線形結合で生じている。 $f_1 = 4$ Vで軌道が不安定となり、周波数ロッキングが起こっていることが分る。このとき、 f_0 / f_1 は有理数となり、スペクトルは $f_L = f_0 / 5 = f_1 / 3$ の高調波のみとなる。 V_p を更に大きくするとカオス状態となる。カオス状態であることは、相関次元やリヤプノフ指数を求めることによって確かめることができる⁴⁾。 V_p が11 Vになると不安定性はクエンチされ、外部振動の高調波だけが観測されることになる。この状態でプラズマの密度や f_1 等を変えるとやはりカオス状態となるが⁵⁾、この場合、カオスは次節と同じ原理で生じているものと思われる。

C. 周期倍分岐ルート

メッシュの裏側のプラズマの密度を上げていくと、メッシュの裏側のプラズマのポテンシャルは下がるが、メッシュと円板間のポテンシャルはほとんど変化しないため、両プラズマ間のポテンシャル差 $\Delta \phi$ は小さくなる。ポテンシャル差 $\Delta \phi$ が小さくなりイオンの反射が起こりにくくなると、不安定性は安定化される^{1, 3)}。この安定化された系に外部振動を印加し、例えば外部振動の周波数 f_1 を上げていくと周期倍加のカスケードを経てカオス状態が得られる⁶⁾。これを図5に示す。 f_1 を更に上げると $f_1 / 3$ と $2f_1 / 3$ の振動が現われ、いわゆる窓が観測される。この周期倍加を経てカオスに到るシナリオは、外部振動の振幅あるいはメッシュと円板間の密度を変化させても観測されるが、初期値に極めて敏感である。初期値の選び方によっては、図6に示したように、1/3-分岐がカオスに到ることなく1/2-分岐に変わるような応答を生じることになる。また、1/2-分岐と1/3-分岐のどちらが先に現われるかといったことも初期値に依存している⁶⁾。

3. 理論的検討

安定系は、イオンがシースに補足され、イオンシースがチャイルドラングミュア則で表される非線形性を持つことを考慮すると、外部振動に対してカオ斯的応答をすることが考えられる^{7, 8)}。

イオンシースの構造は

$$\begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} n v &= 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + n \frac{\partial}{\partial x} v &= \frac{e}{m_i} E, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial E}{\partial x} = \frac{en}{\epsilon_0}$$

の定常解として求められ

$$x - x_0 = \frac{eE_0}{m_i \omega_{pi}^2} \left[(1-A) \left(\frac{E}{E_0} - 1 \right) + \left(\frac{A}{3} \right) \left(\frac{E^3}{E_0^3} - 1 \right) \right],$$

$$A = (\omega_{pi} E_0 \epsilon_0 / I_0)^2 / 2$$

と表される。このイオンシースのもとでイオンの運動を考える。実験で観測される分岐カスケードとカオスは散逸系であることを考慮すると、外部振動を含むイオンの運動方程式は

$$\frac{dx}{dt} = v,$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{e}{m_i} (E_0 - E) - vv + E_{\text{ext}} \sin(\omega_1 t)$$

で記述できる。 $E_0 - E$ は $(x - x_0)(eE_0 / m_i \omega_{pi}^2) = x$ を用いて

$$\frac{E_0 - E}{E_0} \cong - \frac{x}{1 + A[x + (1-3A)x^2/3]}$$

と近似できることから、式

$$\frac{d^2x}{dt^2} + v \frac{dx}{dt} + \frac{x}{1 + A[x + (1-3A)x^2/3]} + E_{\text{ext}} \sin(\Omega t) = 0$$

を得る。これを数値計算した結果は、図7のように外部振動の振幅一定で振動数を変えても、振動数一定で振幅を変えても、分岐カスケードからカオスを示す。これは安定系で観測された分岐とカオスによく一致している^{6, 8)}。 $A \geq 1$ では外部振動の振動数を変えたとき 1/3-分岐、1/2-分岐が現われるが、初期値に極めて敏感でカオスへの集積が認められない場合もある。これも実験の結果とよく合っている^{6, 8)}。

準周期ルートについても、減衰項を ~ 0 とすることにより、定性的に実験結果を説明することができる。この場合、シースに補足されたイオンのバウンス運動が不安定性の役割を果たしていると考えられる⁴⁾。

4. まとめ

ここでは、プラズマ中で実験的に観測されたカオスを理論を含めて簡単に紹介した。これまで、実験的に観測されたカオスは理論的に説明されていなかったため、本研究は、単純な振動のカオスとはいえ実験と理論が初めて結びついた例である⁹⁾。本研究により、我々の系のカオス応答は、チャイルドラングミュア則で表される非線形性を持ったイオンシースにイオンが補足されることにより、生じていることが明らかとなった。

参考文献

- 1) N. Ohno, A. Komori, M. Tanaka, and Y. Kawai, Phys. Fluids B 3, 228(1991).
- 2) A. Komori, N. Ohno, T. Yamaura, and Y. Kawai, Phys. Lett. A 170, 439(1992).
- 3) N. Ohno, A. Komori, S. Takamura, and Y. Kawai, in *1992 International Conference on Plasma Physics*, Innsbruck (European Physical Society, Geneva, 1992), Vol. III, p. 1807.
- 4) N. Ohno, A. Komori, M. Kono, and Y. Kawai, Phys. Fluids B 5, 796(1993).
- 5) N. Ohno, M. Tanaka, A. Komori, and Y. Kawai, J. Phys. Soc. Jpn. 58, 28(1989).
- 6) A. Komori, M. Kono, T. Norimine, and Y. Kawai, Phys. Fluids B 4, 3573(1992).
- 7) M. Kono, H. Nakashima, and A. Komori, J. Phys. Soc. Jpn. 61, 407(1992).
- 8) M. Kono and A. Komori, Phys. Fluids B 4, 3569(1992).
- 9) 小森彰夫、核融合研究 68, 18(1992).

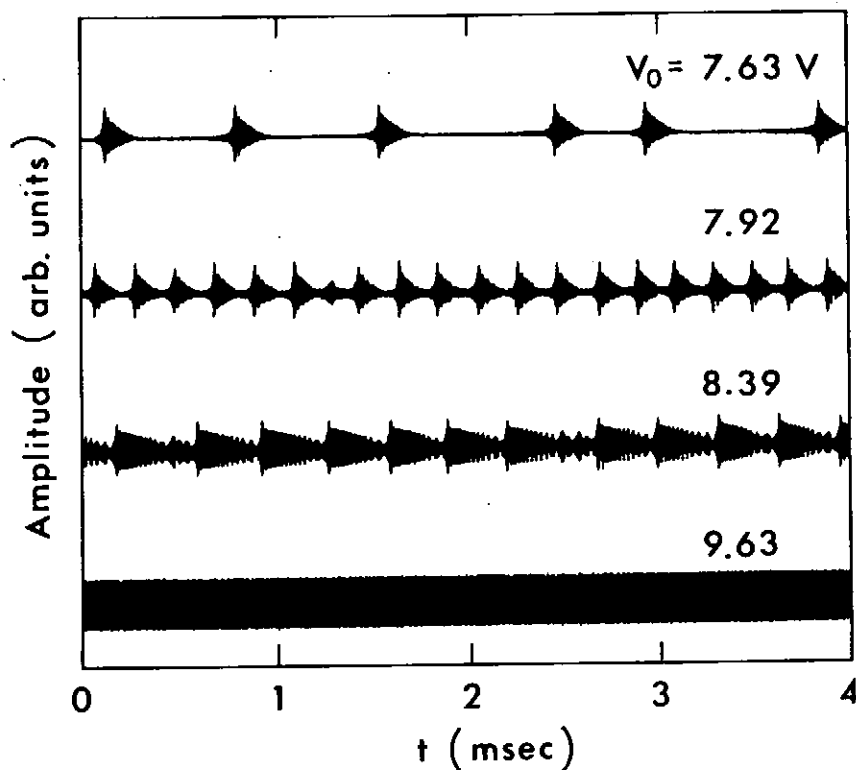


図1 安定状態から周期運動への遷移。

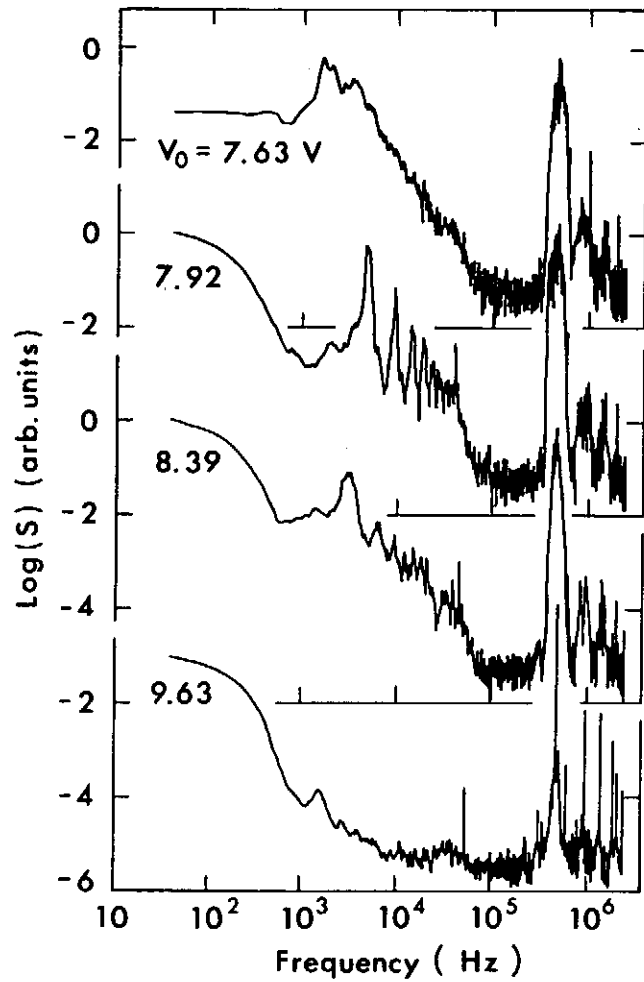


図2 安定状態から周期運動への遷移時に得られたパワースペクトル。図1の時系列データに対応している。

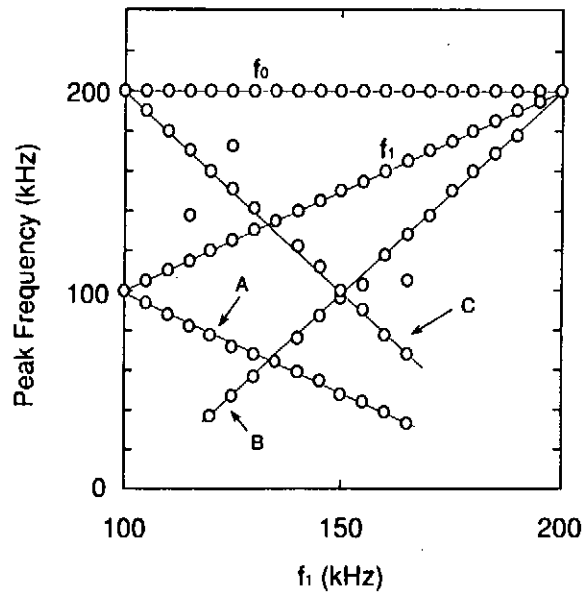


図3 不安定性に振幅の小さい外部周期振動を加えることによって得られた準周期状態。不安定性の周波数 f_0 を200 kHzに固定し、外部振動の周波数 f_1 を100 kHzから200 kHzまで変えている。

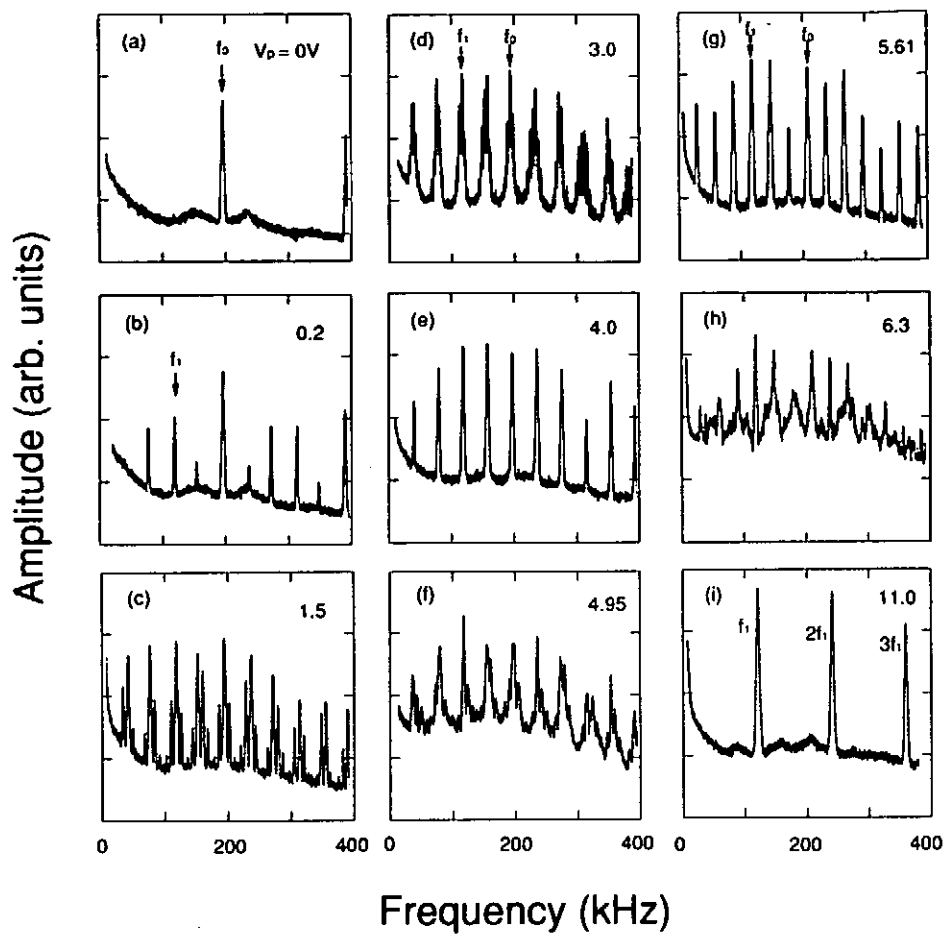


図4 準周期ルートによるカオスの発生。外部振動の振幅を変化させている。

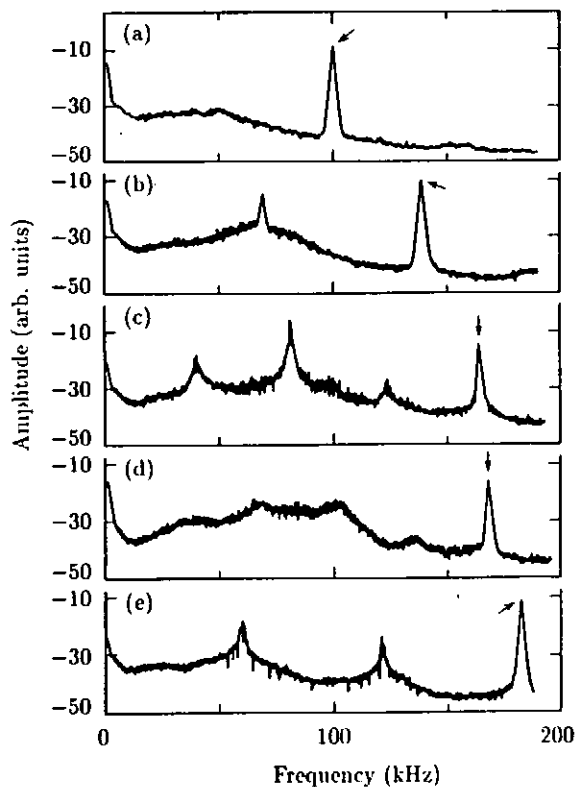


図5 周期倍分岐ルートによるカオスの発生。外部振動の周波数を変化させている。

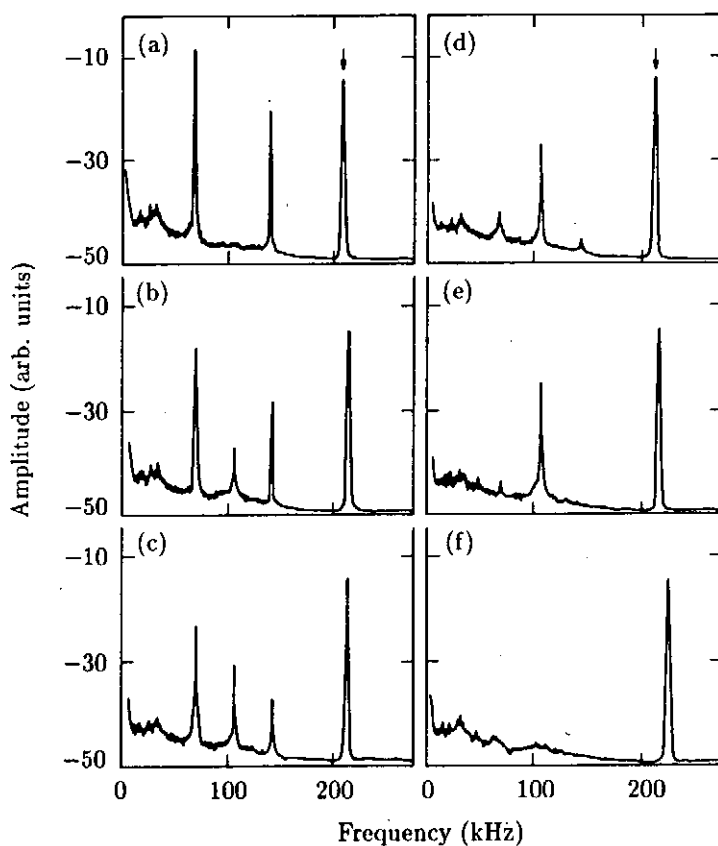


図6 1/2-分岐と1/3-分岐が現われるがカオスへ集積しない例。

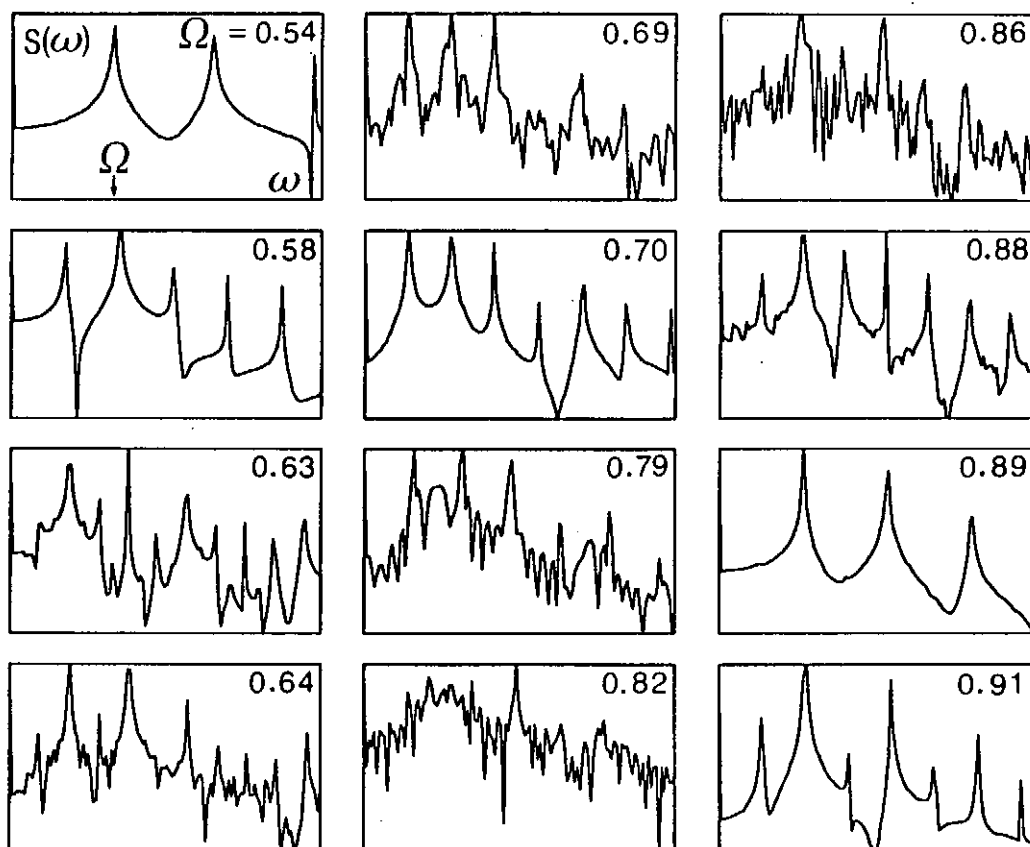


図7 導出した式をもとに数値計算で得られた周期倍分岐ルートによるカオスの発生。

宇宙科学研究所 中村良治

1. はじめに

プラズマ中にエネルギーの揃った電子ビームを入射すると、2流体不安定性により周波数が電子プラズマ周波数にはほぼ等しい波が成長する。この時、ビーム長が波長に比べて十分長ければ、ビームに沿って振動が成長し、振幅が大きくなると非線形性のために飽和する。外部から不安定波の周波数にはほぼ等しい波を励起すると、自然波が抑制されることから自然波の空間的な成長はファンデポール方程式にしたがうことがわかった[1]。また境界が波長の程度の距離であれば、その境界での波の反射により、定在波となる。この時にも外部から振動を励起すると、自然振動が抑制されることから、振動の時間的成長がやはりファンデポール方程式で記述されることが判明した[2]。

最近カオスの研究が活発に行われているが、その見地からファンデポール方程式を考察した研究が行われ、外力を有する場合にはあるパラメータでカオスになるという理論計算がある[3]。それ故、本実験の目的は、上記の有限長の電子ビーム・プラズマ系における電子振動が、カオ斯的振舞いを示すかを調べることにある。カオスを実現するためには非線形性を大きくする必要がありと考へ、前の実験よりビーム密度を大きくして実験した。

2. 実験方法

図1が実験装置の模式図である。直径15cmのパイレックスガラス管に電子銃とリペラーを17cm離して向き合わせる。直径2cmの電子銃は、傍熱型の酸化膜陰極から放出される熱電子を50~100Vまで加速するもので、ビーム電流は制御グリッドの電圧で調節し、0.1~3mAである。リペラーは、加速グリッドと同電位のグリッドと陰極と同電位の金属平板から構成され、やってきたビーム電子の一部を追い返すことにより帰還をかける。またビームが空間的に広がることを防ぐため、一組のヘルムホルツコイルにより一様な磁場(40~60ガウス)を印加している。

測定はガラス管をターボ分子ポンプで連続的に排気しながら、アルゴンガスを管内に流入して行った。ガス圧は $(2\sim 20)\times 10^{-5}$ Torrで、プラズマはビーム電子がアルゴン原子を電離することにより生成される。プラズマ密度はガス圧とビーム電流に依存するが、約 10^8cm^{-3} である。プラズマ中に励起された電子プラズマ振動を線状の探針で受信し、周波数分析器で測定したり、デジタルオ

シロスコープを用いて信号を計算機に取り込んで後述するような解析を行った。外部からの振動は電子銃の制御グリッドに発振器からのサイン波を重畳することにより励起した。

3. 実験結果と考察

ビームとプラズマの相互作用によって発生する電子プラズマ波は、電子銃とリペラーの境界を腹とする定在波である[2]。電子プラズマ周波数はプラズマ密度の平方根に比例するが、いまの場合定在波のため、プラズマ密度を連続的に増加しても発振周波数は離散的に高くなり、基本周波数の整数倍(モード数)でしかも電子プラズマ周波数に近い値となる。

今、モード数4で周波数 $f_4 = 41\text{MHz}$ の振動が発生している時に、 $f_n = 30\text{MHz}$ の振動を制御グリッドに加え、その変調電圧を大きくしてゆくと(図2)、まず自然振動(図2(a)の鋭いピーク)が制御される。更に変調電圧を大きくしてゆくと(b)、(c)、印加しているのは単一周波数の正弦波であるが、励起された波のスペクトルは広がっている。このように広がったスペクトルを有するのはカオスの特徴である。

位相空間における軌道をかかせるには、測定量が2種類ある時には一方を縦軸もう一方を横軸にして描けばよいが、この場合のように時系列データが1種類の場合($X(t)$)には時間微分 $\dot{X}(t)$ を求めなければならない。しかし、 $X(t)$ から数値微分により $\dot{X}(t)$ を得ることはそう簡単ではなく、特に高周波の雑音が存在する時は厄介である。それで $\dot{X}(t)$ の代わりに τ だけ時間をずらした値を用いて、($X(t)$ 、 $X(t+\tau)$)を図示すれば($X(t)$ 、 $\dot{X}(t)$)と似た軌道が描ける。ただ τ の値が小さいと傾きが45度の直線になってしまうので、 τ を平均的な周期の数分の1に選ぶ。以上は2次元での話であるが、 m 次元相空間での軌道を描かせるには、上記の方法を一般化して($X(t)$ 、 $X(t+\tau)$ 、 \dots 、 $X(t+(m-1)\tau)$)を図示すればよい。3次元相空間での軌道の例を図3に示す。

十分時間が経過した時の軌道(アトラクター)がどんな形になっているのかの定量的な目安はその次元である。その一つはフラクタル次元 D であるが、実験的にこれを算出するためには膨大なデータ量が必要なため、それに代わってしばしば求められるのが相関次元 ν である。 m 次元相空間に描かれたアトラクター上の2点、 \vec{X}_i 、 \vec{X}_j の間の距離 $|\vec{X}_i - \vec{X}_j|$ を求めて次の相関積分を計算する。

$$C(r) = \frac{1}{N^2} \sum_{i, j=1}^N \theta(r - |\vec{X}_i - \vec{X}_j|)$$

$\theta(x)$ はヘビサイドの階段関数で、 $x < 0$ のとき $\theta(x) = 0$ 、 $x \geq 0$ のとき $\theta(x) = 1$ である。 r が小さいとき、 $C(r) \propto r^\nu$ となるので、 r と $C(r)$ の両対数グラフの勾配から ν が求まる。 ν の数学的意味はアトラクター上の点がどのように分布しているかを示す。相空間の次元 m (埋め込み次元) を大きくしていても、点が例えば平面上に分布すれば傾きは一定な値 ($\nu = 2$) になる。例として、図 3 (c) の場合の軌道 (図 2 (b)) の計算例を図 4 に示す。 m を大きくしてゆくと勾配は大きくなるが一定値に落ちつく。それを示したのが図 5 である。 m が小さい時、 ν は m に比例するが、やがて飽和する。図 5 で黒丸は $\nu = 1.4$ で、白丸は $\nu = 2.5$ で一定となっている。もちろん変調電圧が小さい時は、軌道が円となるため $\nu = 1$ である。このように一見複雑な信号に見えても次元の値が小さいのがカオスの特徴である。

4. おわりに

図 2 (c) のスペクトルで、振幅の大きな振動が 3 つ見えているが、2 つ目と 3 つ目は、一つ目の振動の高調波になっていない。それらは独立の周波数と考えられる。今の場合のカオスは分類では準周期カオスに入るが、このようなカオスは放電ですでに観測されている[5]。

参考文献

- [1]. P. DeNeef and H. Lashinsky, Phys. Rev. Lett. 31, 1039 (1973).
- [2]. Y. Nakamura, J. Phys. Soc. Japan 31, 273 (1971).
- [3]. G. Qin, D. Gong, R. Li and X. Wen, Phys. Lett. 141A, 412 (1989).
- [4]. 長島弘幸、馬場良和「カオス入門」、培風館 (1992).
- [5]. S. H. Fan et al., Phys. Lett. 164A, 295 (1992).

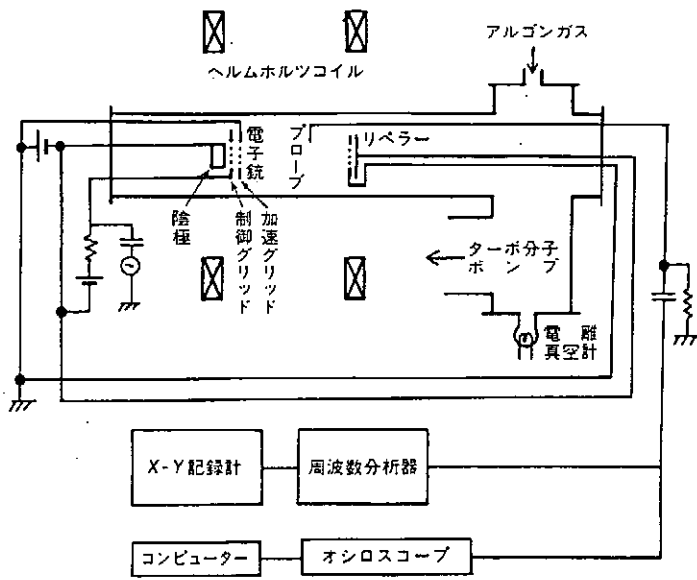


図1. 実験装置

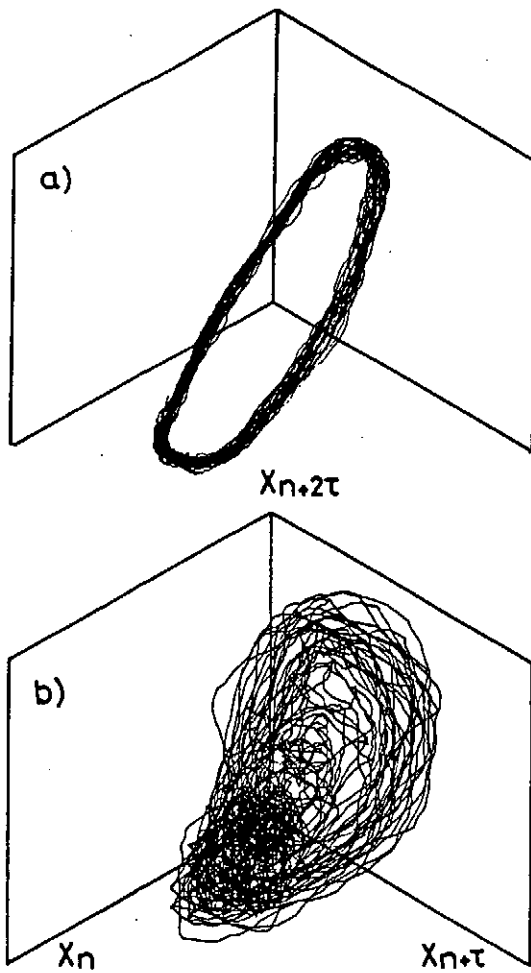


図2. 高速フーリエ変換で計算した周波数スペクトル変調周波数30MHz。加速電圧80V。
(a) 変調電圧0.3V。(b)0.6V。(c)0.9V。

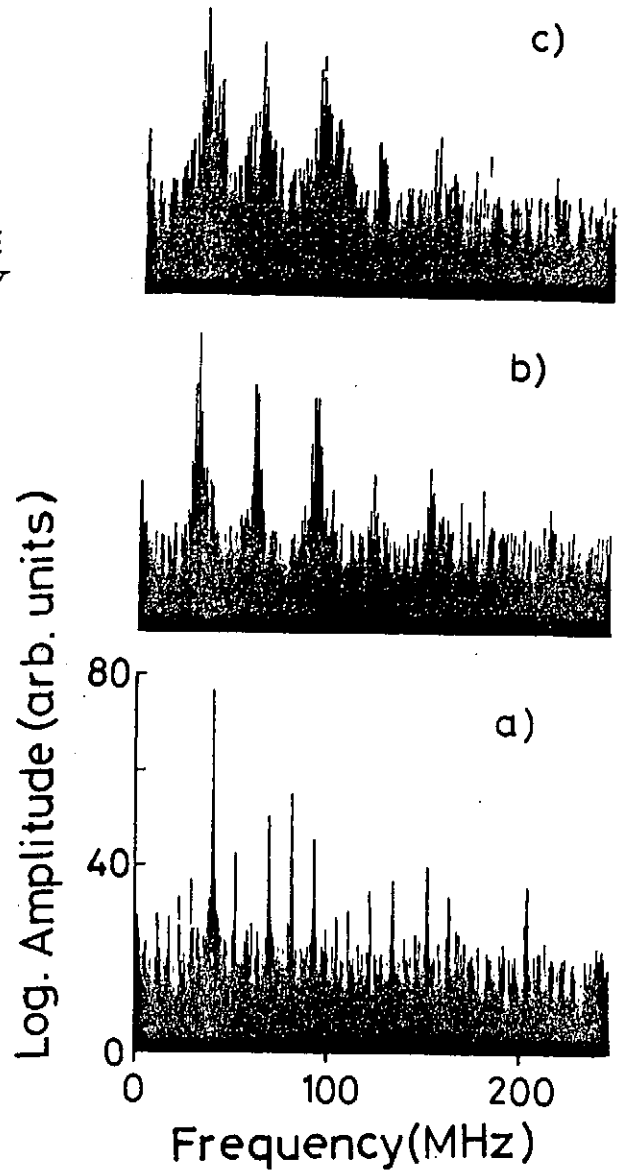


図3. 3次元相空間における軌道
(a)変調電圧0.3V。(b)0.9V。

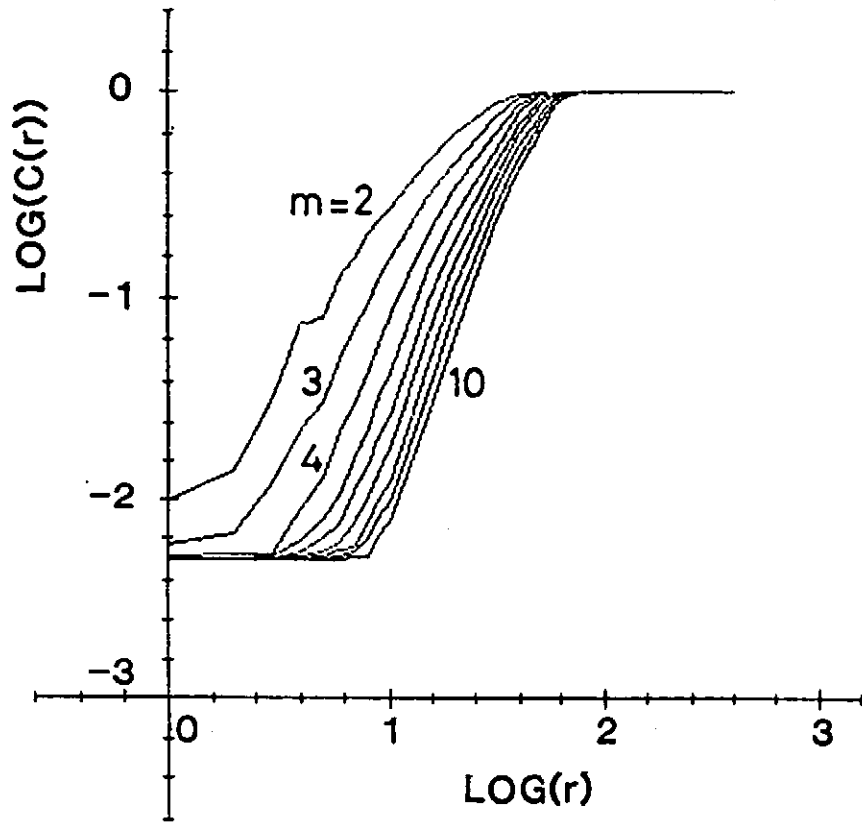


図4. r と $C(r)$ の対数-対数プロット
 m は埋め込み次元。変調電圧0.9V。

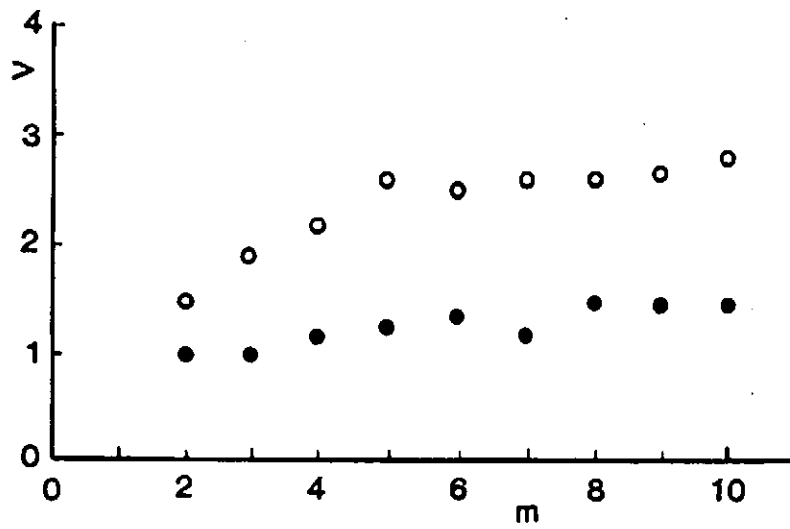


図5. 相関次元 ν の埋め込み次元 m 依存性。
 黒丸は変調電圧0.3V。白丸は変調電圧0.9V。

変調イオンビーム・プラズマ系の波動間相互作用に伴うカオス
長崎大学工学部 藤山 寛

1. はじめに

最近、少数自由度系におけるカオス現象の研究が盛んに行われているが、プラズマや核融合に関連したものでは磁力線のカオスや放電のカオスが多く、プラズマ乱流との対応に興味をもたれている波動カオスについてはほとんど報告されていない。筆者らは低周波モードと高周波モードが共存する弱乱流プラズマ中での波動カオスを、両モード間のエネルギーのやりとりを表すLotka-Volterra方程式に基づいて調べた。

2. 変調イオンビーム・プラズマ系の波動間相互作用とモデル方程式

—磁化プラズマと非磁化プラズマの場合—

非磁化Maxwellianプラズマ中を伝搬する低周波イオン音波（エネルギー密度 X ）と高周波Langmuir波（ Y ）の波動エネルギーの相互関係を図1に示す。

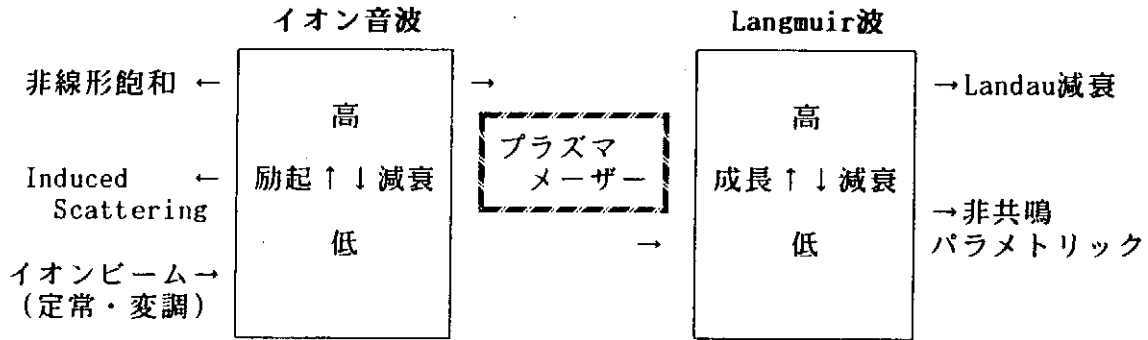


図1 プラズマメーザー効果を含む波動間相互作用

ここでイオン音波を励起するイオンビームに変調を加えるとそのモデル方程式は強制項を含む散逸系の強制型Lotka-Volterra方程式、

$$\frac{dX}{dt} = \alpha (1 + A \cos \theta) X - \beta XY - \epsilon X^2, \quad (1)$$

$$\frac{dY}{dt} = \gamma XY - \delta Y, \quad (2)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega_f, \quad (3)$$

で記述される。定常イオンビーム・プラズマ系におけるモデル方程式では、一個の角周波数成分しか持たず、カオス解を持たない。そこで、変調イオンビーム・プラズマ系でイオン音波の線形成長率が $\alpha (1 + A \cos(\omega_f t))$ で表されるとすると、その解はカオス的振る舞いを示すようになる。この強制型Lotka-Volterra方程式は $X = Y = 0$ で不安定点を持つので、 $x = \log X$ 、 $y = \log Y$ の変換を行い、上式は

$$\frac{dx}{dt} = \alpha (1 + A \cos \theta) - \beta e^y - \epsilon e^x, \quad (1')$$

$$\frac{dy}{dt} = \gamma e^x - \delta, \quad (2')$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega_f, \quad (3)$$

となる。以下ではこれらの式の数値計算の結果について論ずる。

3. 初期値依存性

数値計算において、初期値を一定とすると、実験でするようにアナログ的にパラメータを変化させた場合に観測されない軌道も含まれる可能性がある。そこで、初期値を考慮して、パラメータを変化させても同じアトラクタに至るようにして得られた分岐図を画くよう注意する必要がある。すなわち、計算のあるステップでの最終値を次のステップの初期値に代入

することにより、連続したカスケードが得られるようになる。非磁化プラズマにおける分岐図の一例を図2に示す。この図からファイゲンバウム定数のConvergence Rateを計算すると、 2^n 分岐で4.66となり、ファイゲンバウムのシナリオに従って周期倍分岐を経てカオスに至ることが判明した。

4. 磁化プラズマ

磁化プラズマ中では外部磁界Bの方向にイオン音波が伝搬し、Langmuir波は角度 θ だけ斜めに伝搬するとすると、非磁化プラズマに比べて係数に変化する。各係数の物理的意味および磁界の有無によるモデルの比較をまとめて表1に示す。磁化プラズマにおけるプラズマメーザー効果において、イオン音波の減衰機構として直接結合が、またLangmuir波の成長に分極結合が主要となる点が非磁化プラズマの場合と異なる。

磁化プラズマの場合の初期値を考慮した分岐図を図3に示す。

(a)と(b)は2周期から、(c)と(d)は6周期から出発して変調の度合いAを増加させたときの分岐図である。この図から6周期のカスケードは2周期のカスケードに比べてエネルギーが高いため、 $A=0$ から増加させた場合に6周期のカスケードは2周期のカスケードに隠れて観測されない。

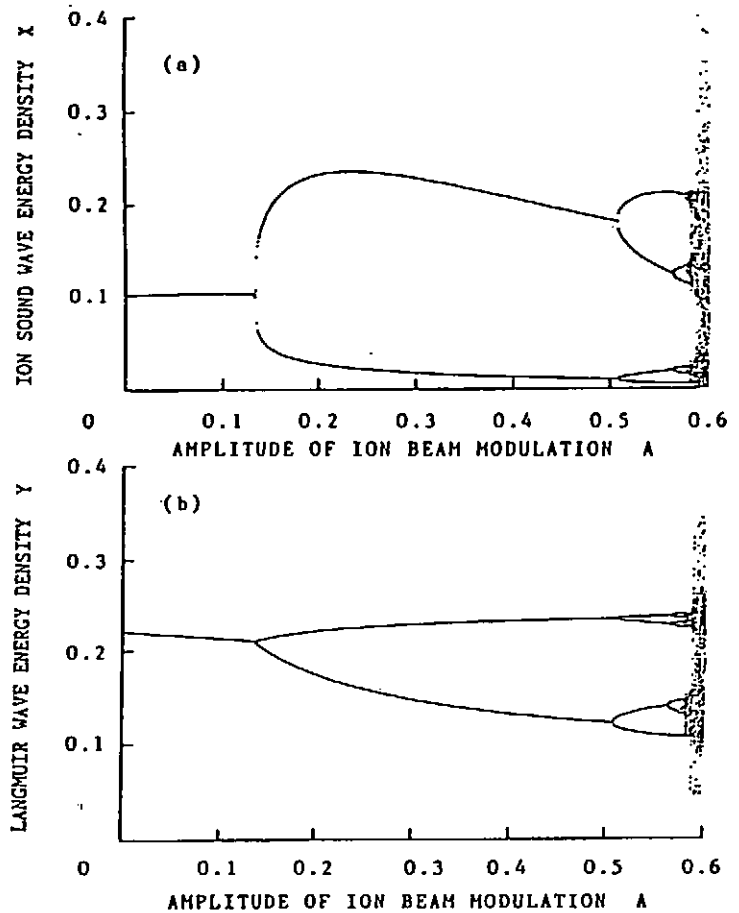


図2 初期値を考慮した分岐図(B=0)

表1 磁界の有無によるモデルの比較

	係数	物理的意味	非磁化プラズマ	磁化プラズマ
イオン音波	$\alpha / 2$	イオンビームによる線形成長率	線形成長率の最大値	
	$\beta Y / 2$	プラズマメーザーによる非線形減衰率	分極結合が主	直接結合と分極結合が同オーダー
	$\epsilon X / 2$	非線形飽和及びInduced Scatteringによる非線形減衰率	Induced Scatteringが主	
Langmuir波	$\gamma X / 2$	プラズマメーザー及び非共鳴パラメトリックによる非線形成長率	直接結合のみ	分極結合が主
	$\delta / 2$	線形Landau減衰率	それぞれの分散関係による	

散逸系では、解は初期条件によって異なるアトラクタに収れんし、カオスアトラクタや周期アトラクタなどが共存する。本モデル方程式でも波の初期エネルギー X_0 、 Y_0 によりファ

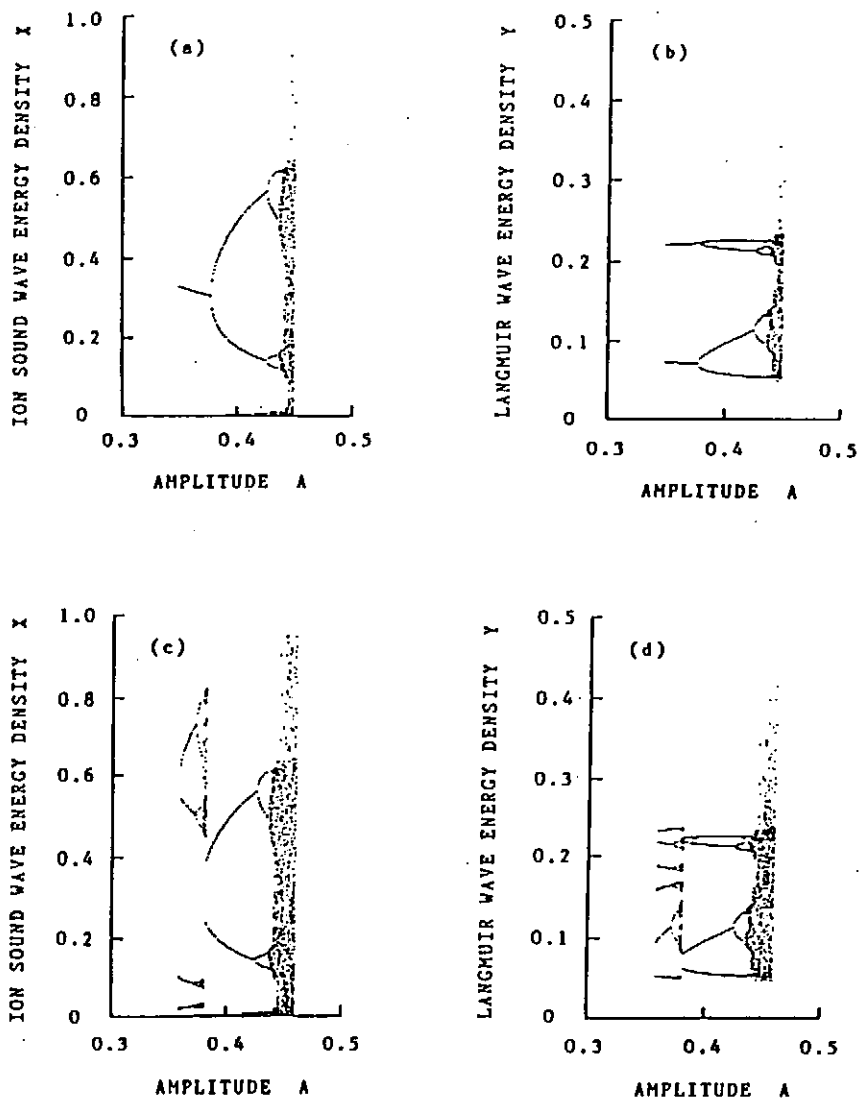


図3 初期値を考慮した分岐図 (B=500G)

イゲンバウムのシナリオに従う4種のカスケードが共存していることが判明した。図4にアトラクタの棲み分けを示す。

また、表2に4種のカスケードにおけるファイゲンバウム定数とカオス状態の最大リアプノフ指数（そのときのA値）を示す。Basin Boundary Map（図5：この図もフラクタル）によると初期条件のわずかな違いにより解は異なるアトラクタに吸引される。

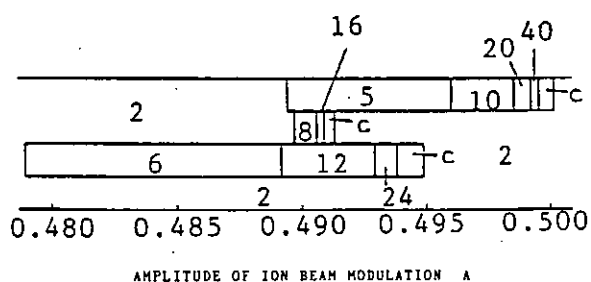


図4 アトラクタの棲み分け

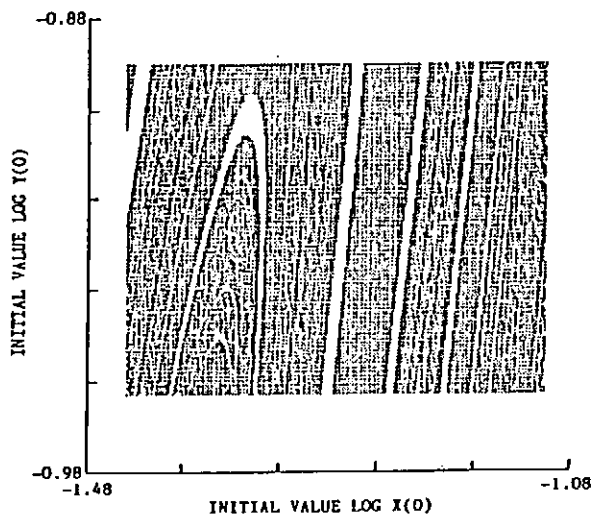


図5 Basin Boundary Map

表2 4種のカスケード

カスケード	ファイゲンバウム定数	最大リアプノフ指数
2×2^n	$\delta_5 = 4.756$	$906 \pm 16 (0.5850)$
5×2^n	$\delta_2 = 4.545$	$449 \pm 15 (0.5003)$
6×2^n	$\delta_2 = 4.571$	$438 \pm 16 (0.4948)$
8×2^n	$\delta_2 = 4.048$	$246 \pm 10 (0.4909)$

5. 解空間の統計的性質

ここで、カオス研究のアプローチを図6にまとめて示す。本研究におけるモデル方程式においても、これらのアプローチを試みた。そのうち、散逸系のアトラクタを特徴づけるリアプノフスペクトル、次元、K-Sエントロピーを計算した結果を述べる。

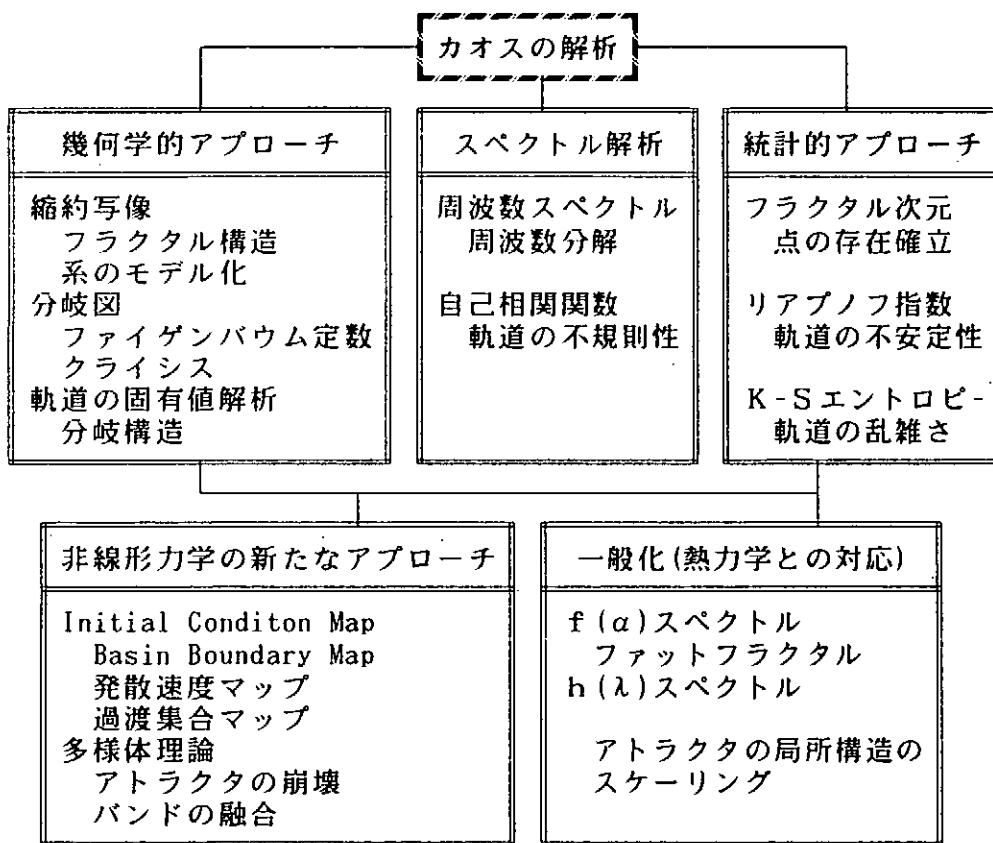


図6 カオスの研究の概略図

非磁化プラズマモデルで、イオンビームの変調度 A を変化させたときに、初期条件を考慮した分岐図を 2^n 分岐について図7に、 6×2^n 分岐について図8に示す。これらの図に対応させてリアプノフスペクトルを計算した結果が図9と図10である。図9で $\lambda_1 = 0$ で λ_2 が0に限りなく近づくとき軌道は分岐し、そのときの A の値が分岐点となる。また、 $A \sim 0.577$ で最大リアプノフ指数 λ_1 が正となるので、計算した範囲でこの臨界値以降はカオス状態となっている。図10でも同様に $A \sim 0.493$ 以降がカオス領域である。図10に対応して初期条件を変えて2周期からなる軌道についてリアプノフスペクトルを求めたのが図11である。この図からわかるように軌道が異なればリアプノフスペクトルも異なる。以上のことから、 $\lambda_2 = 0$ のときが分岐点であり、 λ_1 が正になるとカオス状態を示すことが明らかになった。また、オーダー3のリアプノフ指数はリアプノフスペクトルの和であることから、変調の度合いが変化してもリアプノフ指数はあまり変化しない。

図12に $A = 0.6$ のときの埋め込みの次元 m に対応する相関指数 ν_m の関係を示す。 m を

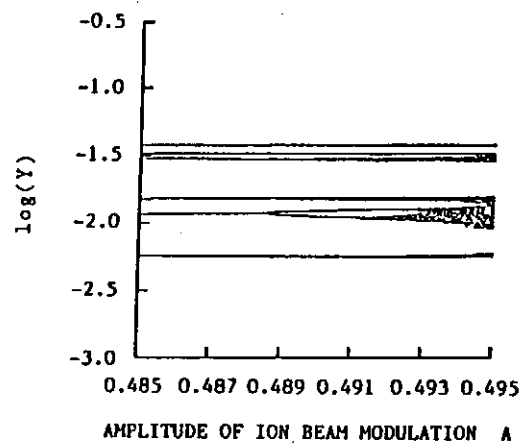
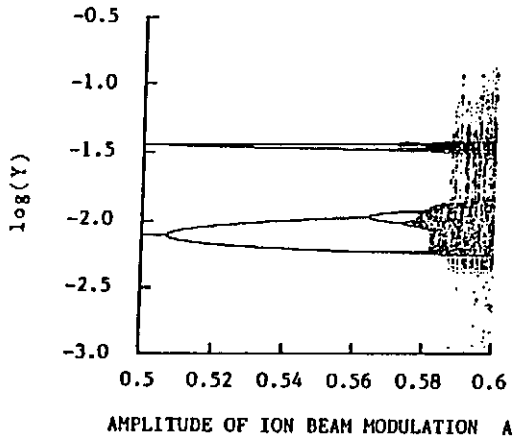
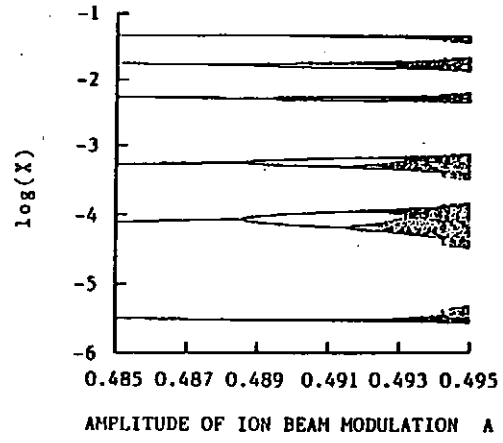
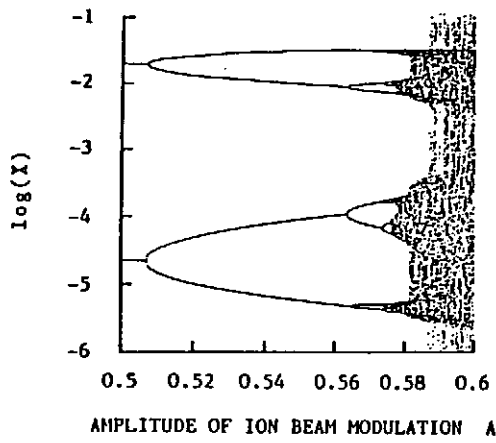


図7 非磁化プラズマ中の分岐図(2ⁿ分岐)

図8 非磁化プラズマ中の分岐図(6×2ⁿ分岐)

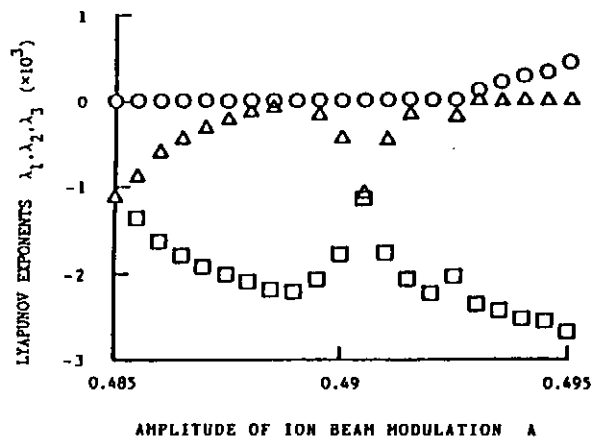
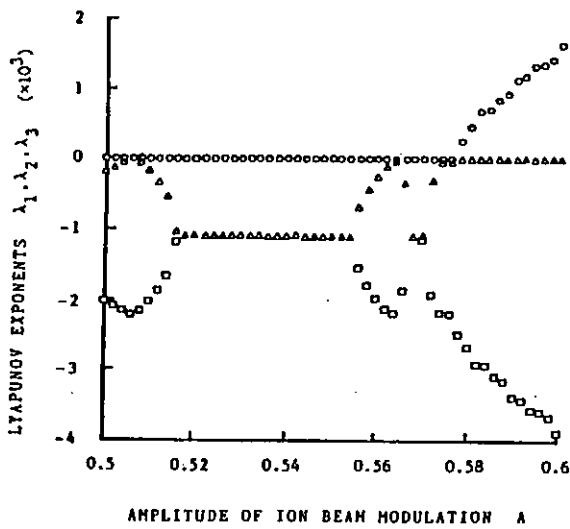


図9 2ⁿ分岐のリアプノフスペクトル (○: λ₁, △: λ₂, □: λ₃)

図10 6×2ⁿ分岐のリアプノフスペクトル (○: λ₁, △: λ₂, □: λ₃)

増加させると ν_m は飽和する傾向があり約2.2に漸近する。従って、アトラクタの次元は約2.2次元であることがわかる。

次にリアプノフスペクトルより計算した次元を2ⁿ分岐について図13に、また6×2ⁿ分岐について図14に示す。図7および図8と対応させて考えると、クライシスが起こる条件で次元が少し増加する傾向がある。また、乱雑さの指標であるK-Sエントロピーをそれぞれの場合について計算すると、図15と図16のようになる。この図も次元と同様クライシスが起こる条件で若干エントロピーが増大していることがわかる。従って、クライシス後はアトラクタはさらに複雑になり、構造が多彩になる。

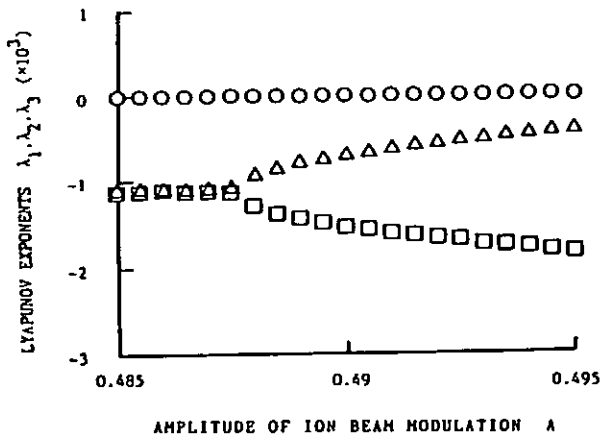


図 1 1 A=0.49近傍の2ⁿ分岐におけるリアプノフスペクトル

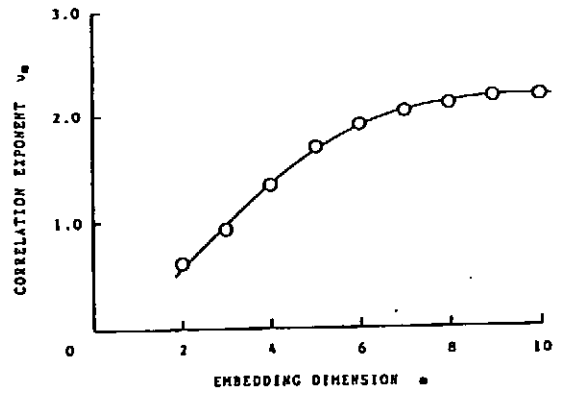


図 1 2 相関次元 (A=0.6)

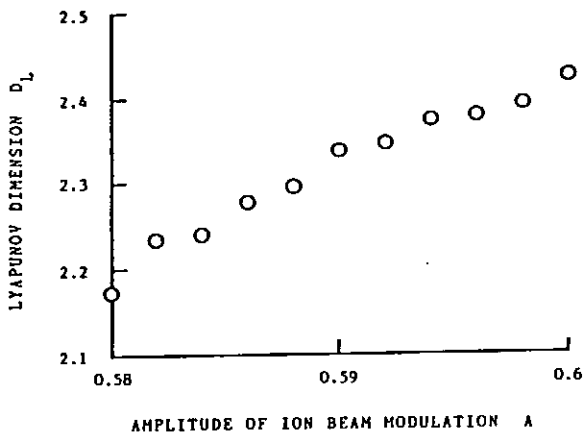


図 1 3 Aに対するリアプノフ次元 (2ⁿ分岐)

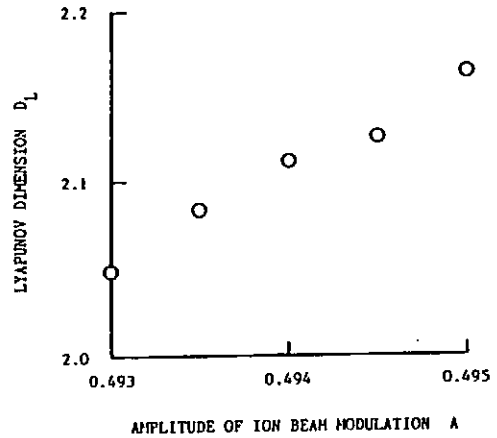


図 1 4 Aに対するリアプノフ次元 (6x2ⁿ分岐)

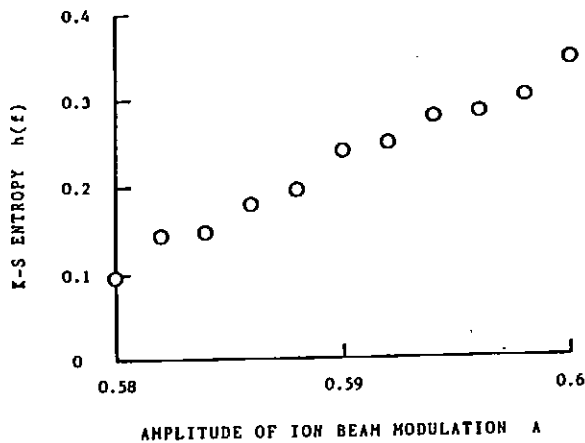


図 1 5 Aに対するK-Sエントロピー (2ⁿ分岐)

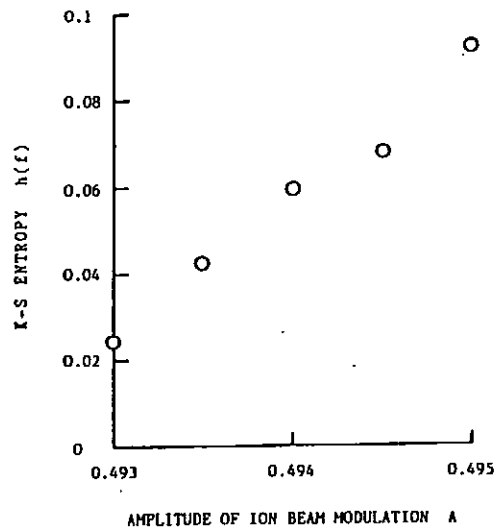


図 1 6 Aに対するK-Sエントロピー (6x2ⁿ分岐)

6. おわりに

本研究では、変調イオンビーム・プラズマ系における波動間相互作用を記述する強制型 Lotka-Volterra方程式の解が、周期倍分岐を経てカオスに至ることを示した。また初期値によって、少なくとも4種のアトラクタが存在し、位相空間を複雑に棲み分けていることが判明した。

電子サイクロトロン波と捕捉電子のカオス過程

九州大学 総合理工学研究科 田中雅慶, 庄山裕章, 河合良信
文部省 核融合科学研究所 小森彰夫
中央大学 総合政策学部 河野光雄

はじめに

波動とプラズマ粒子の非線形相互作用によるカオス現象の研究は、プラズマ加熱基礎論や宇宙における高エネルギー粒子の発生などに関連した重要な研究課題である。プラズマは集団効果によって固有の波動モードを内在させるが、一方では波動-粒子間の非線形相互作用によりカオス現象を示す。いわば、自己組織化とカオス化が共存する系である。

従来の波動粒子系のカオス現象は統計加熱という言葉で議論されてきた。統計加熱は速度空間のランダムウォークを基礎にしており、そのランダムネスがどのような物理機構によるかが問題であった。従って、これまでの研究は多自由度系を対象にしたものが多い。即ち、波-粒子間相互作用の統計性を複数の波との相互作用に求めたのである。Dandl, 池上らによる先駆的研究はこの場合に相当している。そこでは、容器内で多重反射する正常波がミラー捕捉された電子を MeV 領域のエネルギーまで加速することを実験的に示した[1-3]。

近年カオス理論の成功は、少数自由度の系においてもカオスが発生することを示し、カオス化の原因が系の非線形性にあることを明らかにした。この観点に立てば波動-粒子系のカオス研究は少数自由度、即ち単一波動が励起された条件下で調べてみるのが重要である。現在このテーマに関して2つのグループが実験的研究を行っている。1つはローザンヌのグループで、縦波（イオンバーンシュタイン波）と相互作用するイオンの加熱を調べている[4,5]。我々は、電磁モードと相互作用する電子のカオス過程を調べている[6,7]。通常、電磁モードは吸収率が小さいため容器内で多重反射し、キャビティモード（定在波）としてプラズマ中に存在することが多い。そのため、電子と波との相互作用を考える場合、多数の波動が関与する複雑（多自由度）な系となりやすい。我々がこの研究で特に留意した点は、実験的に最も自由度の低い系を実現する事であった。これは低密度においても吸収率が大きな電子サイクロトロン波を用いることによってはじめて可能となる。以下では、現在までに得られている実験結果を説明し、現象の離散化モデルによる予備的な結果についても報告する。

不均一磁場中の捕捉電子とX線発生

磁場中に弱い不均一性があると一部の電子はミラー捕捉されてバウンス運動をするようになる。プラズマ中に電子サイクロトロン波（ECW）が存在すると、捕捉電子は各バウンス毎にECWと相互作用し加速または減速される。電子が加速されるか減速されるかは、ECWの存在する領域に達したときのバウンス運動とジャイロ運動の位相の相対関係によって決まる。いま一個の捕捉電子に着目すると、この電子はバウンス周期のある時点でその位相によって決まるキックを受け速度空間を動き回ることになる。即ち、ECWと相互作用する捕捉電子は、二つの周期（ジャイロ周期、バウンス周期）を持つ振動子+外力キックからなる系と見ることができる。

実験はまず捕捉電子がこの現象の直接の原因であることを示すため、磁場の不均一性を連続的に変化できるようにして行った。図1に実験装置の概略と磁場配位を示す。外部コイルによってつくられる磁場は、入口側で強磁場 ($\omega/\omega_{ce} < 1$) となっており、 $Z = 20 \text{ cm}$ 以後はごくわずかに減少する。この状態では不均一性によってバウンスする電子はない。容器内にソレノイドコイルを置き、その電流を変化させることで磁場を付加し弱いミラー配位を作って捕捉電子を生成する。ミラー比は1.0から1.086まで連続的に変化させることができるようになっている。プラズマは2.45 GHzのマイクロ波を容器端より磁場に平行入射する事によってつくられる。ガスはアルゴンを用い、動作圧力は $7.5 \times 10^{-5} \text{ Torr}$ である。また高エネルギー電子の存在は制動放射による軟X線を半導体検出器を用いて測定した。

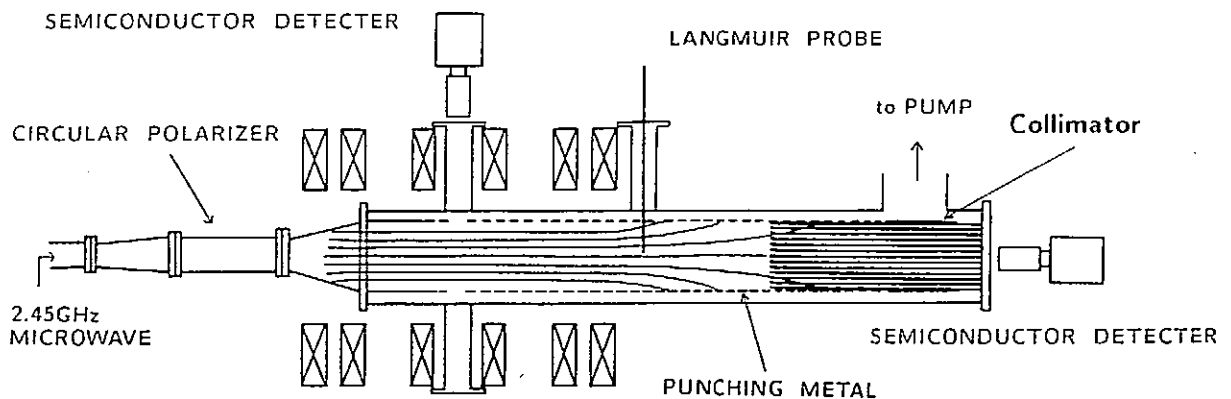


図1 (a) 実験装置の概略図

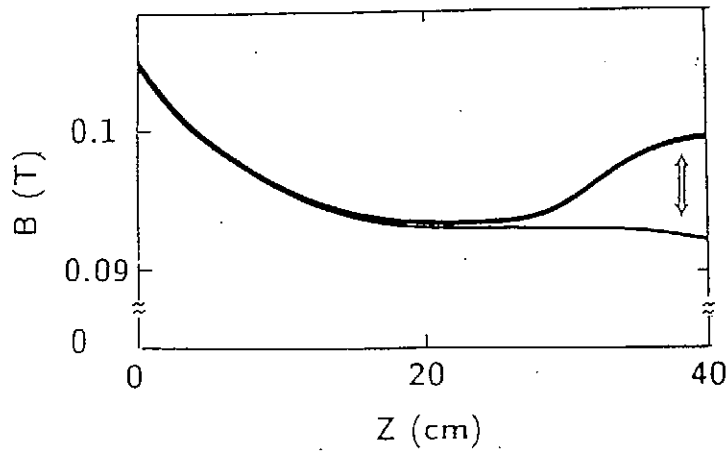


図1 (b) 磁場配位

図2にプラズマ中に励起された波の空間波形を示す。この波は分散特性からECWであることが確認されている。ECWは吸収率が大きいため、このような低圧・低密度の実験においても十分早く減衰してしまい、正常波の場合の様な容器内多重反射の問題は起こらない。従って、プラズマ中に単一波動のみが存在している条件を実現することができる。さらに、ミラー比を変化させても波動伝播には変化は見られず、電子密度、電子温度ともそれぞれ $6.5 \pm 1.0 \times 10^{11} \text{cm}^{-3}$, $14 \pm 2 \text{ eV}$ と一定であった。

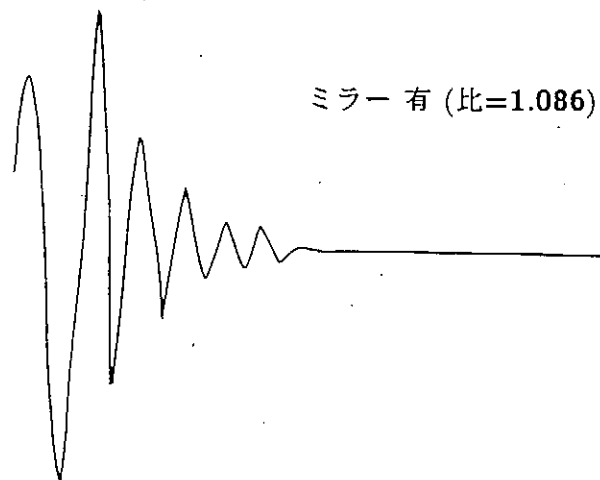


図2 干渉法によって得られた波動の空間波形

図3にミラー比を徐々に高くして行った時の制動放射X線のエネルギースペクトルを示す。ソレノイドコイルに流す電流を0にした場合はX線放出は全く観測されないが、ミラー比を高くするに従って3 KeV付近からカウントが始まりミラー比1.076では10 KeV付近までのX線が観測される。この事は、最大で10 KeV程度まで加速された電子が存在していることを示している。図中3 KeVのピークは実験に用いたアルゴンの特性X線であり、3 KeV以下のカウント数の低下は観測窓（マイラーシート）と半導体検出器窓（ベリリウム）によるX線吸収である。吸収係数によるカウント数の補正は行っていない。

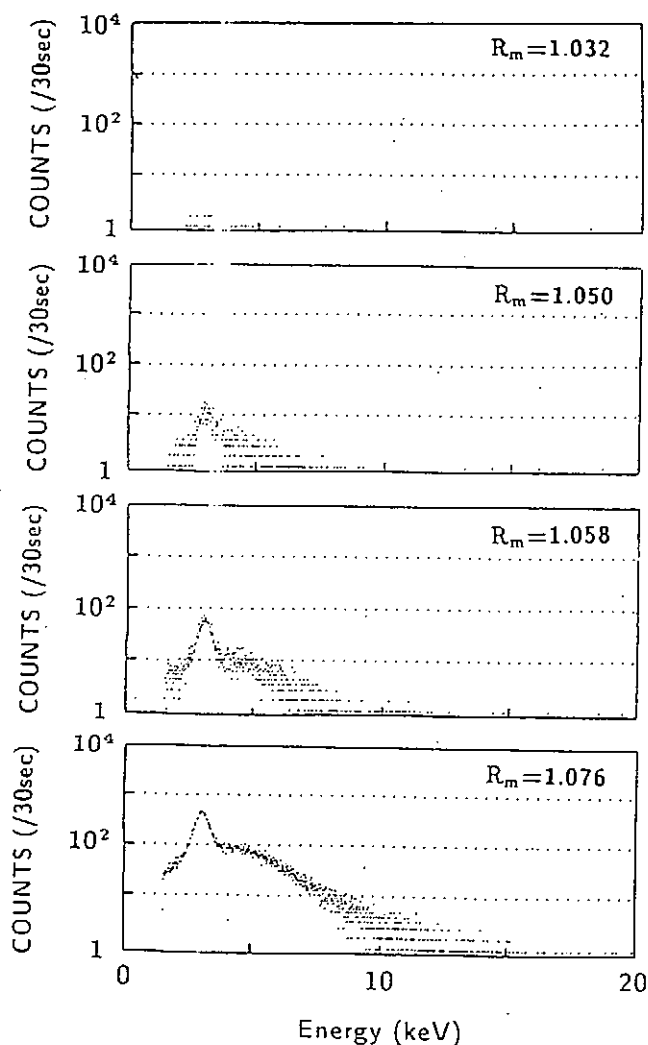


図3 ミラー比を変化させたときのX線エネルギースペクトル

この実験では、バルクプラズマのパラメーターは不変であるため、ミラー比を変化させることは捕捉電子の生成のみを制御していることになる。従って、10 KeV領域まで加速される高エネルギー電子はECWと相互作用する捕捉電子であると結論できる。ミラー比の関数としてX線全カウント数をプロットしたものを図4に示す。

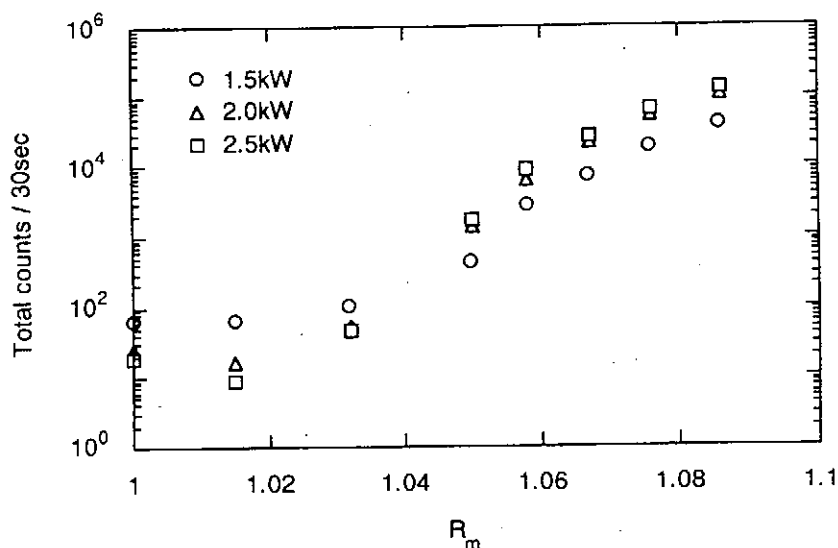


図4 ミラー比を変化させたときのX線総カウント数

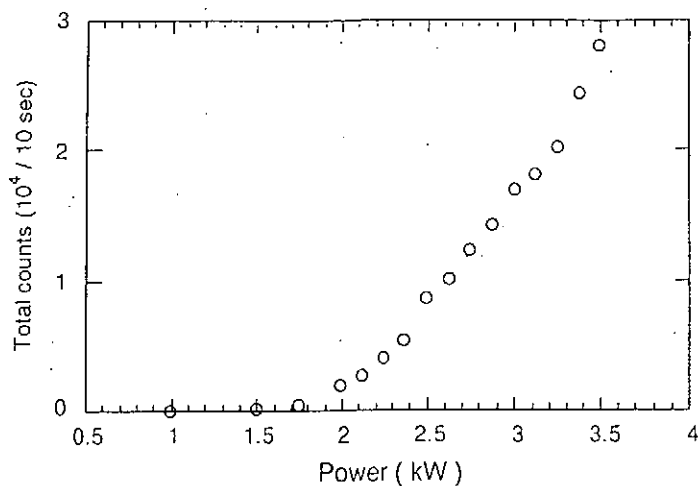


図5 マイクロ波パワーとX線総カウント数

X線放出は入射マイクロ波パワーに対して閾値がある。図5にミラー比1.241の場合の入射マイクロ波パワーとX線総カウント数を示す。図にみるように1.75 kW以下ではX線放出は全く見られないが、それ以後はパワーの増加とともにカウント数

が急激に増加していく。このことは、バウンスごとのキックの強さによって捕捉電子の到達エネルギー、即ち速度空間のカオティックな領域が変化するためであると考えられる。

X線放出の径方向分布は真空容器端より13個のコリメートされた窓から測定した。図6にその結果を示す。図に示すように、X線を放出している高エネルギー電子は半径4cm以内の中心付近にややくぼんだ形で分布しているが、形状に関してこれ以上詳しいことは解っていない。

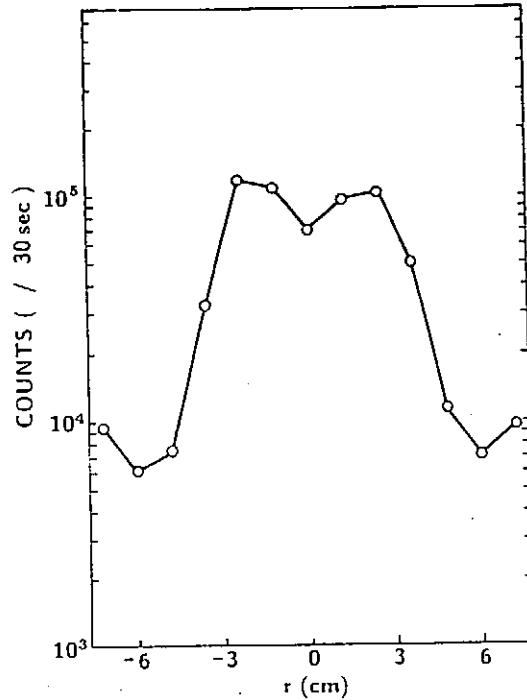


図6 X線放出の径方向分布

離散化モデル

バウンス振動する捕捉電子がその振動の過程でECWによりキックを受けるモデルを考える。磁場は平坦部と両端のミラー部分からなっており、ECWは一方のミラー部分に局在しているとする。磁場に平行方向の運動は早いラーマー周期で平均したものをを用いると

$$m\dot{v}_z = -\mu \frac{\partial B}{\partial z} \quad (1)$$

で与えられる。ここで μ は磁気モーメントで、垂直方向速度をそれぞれ u, v とすると $\mu = m(u^2 + v^2)/2B$ で与えられる。ミラー部の磁場変化を2次関数で近似すると(1)の解は

$$z = (v_{||0}/\omega_b) \sin(\omega_b t + \alpha) \quad (2)$$

で与えられる。捕捉電子は(2)で決まる振動の中で、ECWの存在する領域を通過する毎に加速または減速を受ける。このバウンス運動の周期で問題を離散化して考える。 n 回目のバウンス運動で垂直方向速度 u_n, v_n であった電子が加速を受けて $n+1$ 回目のバウンス運動に入ったとき、その速度が u_{n+1}, v_{n+1} になったとすると、

$$u_{n+1} = \left[u_n + \frac{K J_1(\zeta_n)}{\sqrt{u_n^2 + v_n^2}} \right] \cos \omega_{ce} T - v_n \sin \omega_{ce} T \quad (3)$$

$$v_{n+1} = \left[u_n + \frac{K J_1(\zeta_n)}{\sqrt{u_n^2 + v_n^2}} \right] \sin \omega_{ce} T + v_n \cos \omega_{ce} T \quad (4)$$

と書ける(詳細は省略した)。ここで T はバウンス振動周期で磁場の平坦部を通過する時間とミラー部を折り返す時間の和であるが、今は簡単のため定数としておく。 K は ECW の電場の振幅に比例した量でキックの強さを表す。ベッセル関数 J_1 の引数は u_n, v_n の関数で

$$\zeta_n = \frac{k v_{\parallel 0}}{\sqrt{u_n^2 + v_n^2}}$$

で与えられる。 k は波の波数である。 $K J_1(\zeta_n) / \sqrt{u_n^2 + v_n^2}$ の物理的意味はバウンス中に基本電子サイクロトロン共鳴を通して受ける加速(または減速)の総量で、 $K=0$ の場合は、(3)(4)は単にラーマー運動をバウンス振動の周期で離散化したものになる。

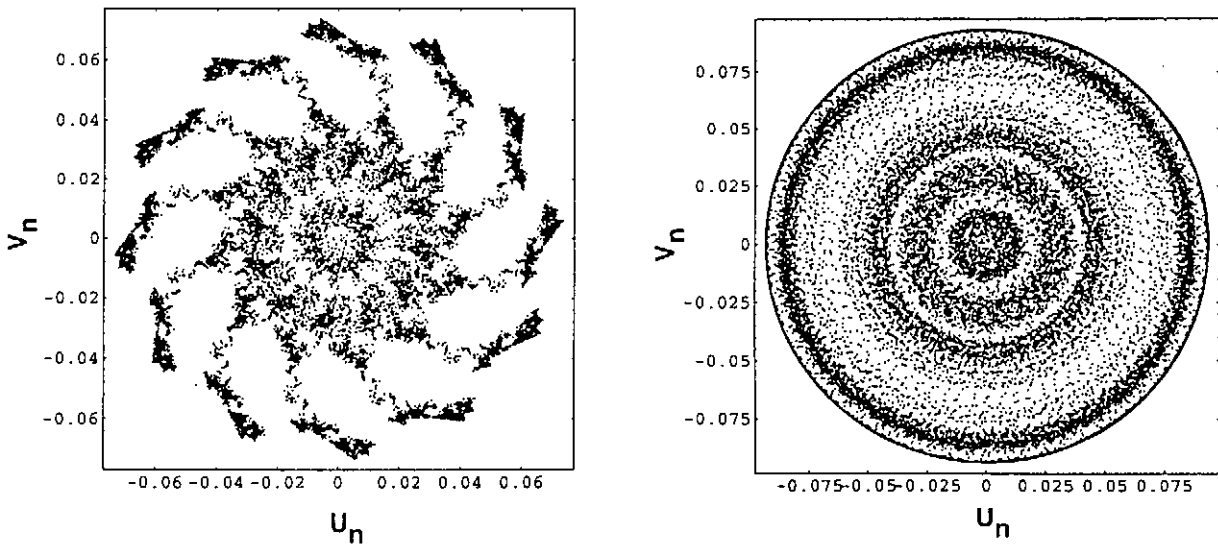


図7 左図:(a)有理比の場合; 右図:(b)無理比の場合

図7に(3)(4)を使って一つの初期条件を40000回マッピングした結果を示す。図7(a)はバウンス周期とラーマー周期の比が有理数($2\pi \times 1/12$)の場合、(b)

はその比が無理数の場合である。それ以外のパラメーターは共通にとってある。両図とも、電子は速度空間でカオティックに動き回っていることを示しているが、図7(a)には渦巻様の12本の腕が見られる。一方、2つの周波数比が無理数の場合は速度空間のカオティックな領域にリング状の粗密以外は特別な構造は見られない。いずれの場合も初期速度の70倍程度(エネルギーで5000倍)の加速が起こっている。

バウンス運動するラーマー振動子に外部キックという一見簡単に思える系であるが、速度空間におけるカオティックな振る舞いは二つの周波数の比が有理であるかないかによって多様なパターンを見せる。速度空間における12本の腕構造はストカスティックウェブ(Web)との関連もあり興味ある問題であるが、詳しい解析は実験との対応も含めて今後の課題である。

まとめ

電子サイクロトロン波と相互作用する電子を、ハミルトン系のカオスの観点から実験的に調べた。我々の実験の特徴は単一の波動が励起されている点であり、最低の自由度の系を実現している。これまでに、磁場の不均一性による捕捉電子が現象の主因である事を明らかにした。結果をより詳細に理解するため、現象の離散化モデルを提案し、予備的な計算を行った。その結果、速度空間における電子の写像は二つの固有周期の比に依存して多様なパターンを見せる事がわかった。これは、統計加熱が従来前提としてきた速度空間のランダムウォークとは明らかに異なる結果である。これらのパターン生成とX線スペクトルの関係など今後明らかにしなければならない課題は多いが、プラズマ波動と相互作用する粒子のカオティックな加速は、我々が考えていた以上に多彩な物理を含んでいそうである。

参考文献

- [1] R. A. Dandl, *et al.*; Nucl. Fusion 4(1964)334
- [2] H. Ikegami, *et al.*; Phys. Rev. Lett. 19(1967)778
- [3] T. Kawamura, *et al.*; Nucl. Fusion 11(1971)339
- [4] G. R. Smith A. N. Kaufman; Phys. Rev. Lett. 34(1975)1613.
- [5] F. Skiff, *et al.*; Phys. Rev. Lett 58(1987)1430
- [6] 庄山 他, 物理学会第47回年会 (1992年3月, 慶応大学)
- [7] 庄山 他, 物理学会秋の分科会 (1992年9月, 東京大学)

カオス解析手法の応用

核融合科学研究所 江尻晶

1. はじめに

しばしば、現実の物理現象は非常に複雑な振る舞いをする。簡単な数式で表せるような予測可能な振る舞いをする場合や、逆に非常に複雑ではあるが、その系が均質で統計的な平均量だけで記述できる場合は少ない。プラズマのように本質的に自由度が大きくしかも、相互作用が強い系では上の2つの両極の中間状態がおきる。この中間を埋める可能性をもつのがカオスである。ここで言うカオスは「少数の自由度をもつ系の示す複雑な（非周期的な）振る舞い」のことである。物理現象の解明が、少数の自由度あるいは少数の式で現象を記述することであるとすれば、複雑な現象をカオスとして捉えることは自然なことである。カオスからのアプローチは非常に一般的なものであり、その結果様々な分野で成果をあげてきた。

長年のカオスの研究の過程で、カオスの特性を調べるための種々の手法が開発された。実際の乱流状態にあるプラズマが、カオスであるかどうかは不明であるが、開発された種々の手法をプラズマに適用することは意義のあることである。カオスの特性を記述する代表的な量としてフラクタル次元、リアプノフ指数などがある。ここでは実際の実験データに対して、フラクタル次元を計算し、そのときの問題点について考察する。

2. フラクタル次元の意義

有限な自由度を持つ系、あるいは決定論的な系が複雑な振る舞いを示すのは相空間における軌道を測定量、物理量として表現するとき射影をするからである。逆に測定量を相空間より次元の高い空間へ上手に埋め込むことができれば、その空間での軌道を調べることによって、その系の特性を調べることができる。また、埋め込んだ空間での軌道が有限次元であれば、その系の自由度が有限であることがわかる。軌道の次元はフラクタル次元で表すことができる。このフラクタル次元は微分可能な変換によって変わらない次元であり、測定量のフラクタル次元を求めることができれば、その系の自由度がフラクタル次元以下であることが保証される。これは現象を理解するための強力な道具となる。次元を求めるための種々の手法が開発されているが、時系列データに対しては相関次元というフラクタル次元を計算することができる。

3. 相関次元の計算方法

ある測定量の時系列が十分短いサンプリング時間の間隔で得られているとする。これを $x(t)$ とする。ただし、測定時間は有限である。相関次元は時系列データから作った d 次元空間の軌道の幾何学的な次元を示すものである。時系列データを d 次元の空間に埋め込む時によく使われる方法は、以下のように等時間間隔でデータをサンプルし、 d 次元ベクトルとして表す方法である。

$$\vec{x}(t_i) = (x(t_i), x(t_i+t), x(t_i+2t), \dots, x(t_i+(d-1)t)) \quad (1)$$

ここで時間間隔 t を便宜的にベクトル間隔と呼ぶことにする。 d 次元空間上のベクトルの時間的な軌道は

$$\vec{x}(t_0), \vec{x}(t_1), \vec{x}(t_2), \dots, \vec{x}(t_N) \quad (2)$$

と表される。ここで、軌道を追いかける時間間隔を

$$\tau = t_{i+1} - t_i \quad (3)$$

とし、追跡間隔と呼ぶことにする。また、各々のベクトルを軌道点と呼ぶことにする。このようにして得られた d 次元の空間上の軌道点の分布を調べて、それが d 次元空間上で D 次元の面上に分

布していれば、その系の自由度（相空間の次元）はD次元である。もし、埋め込む空間の次元dが系の自由度Dよりも小さければd次元空間上の軌道点の分布はd次元の立体を構成する。埋め込む空間の次元を増やしながら軌道の次元を調べて、軌道の次元が飽和すれば、その次元が系の自由度となる。軌道の次元は以下の方法で求める。d次元の空間を十分小さい距離εの立方体（又は球）に分割し、その立方体内に含まれる軌道点の数を数える。この数をn(ε)とする。距離εを変えていったとき、n(ε)がε^Dに比例すれば、この軌道の次元はDである。d次元空間の標本点としてある軌道点 \vec{x}_i をとると、その点から距離ε内に軌道点がある確率は

$$C_i(\epsilon) \equiv \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N H(\epsilon - |\vec{x}_i - \vec{x}_j|) \quad (4)$$

となる。ここでHはHeviside関数である。Nは軌道点の数である。軌道全体での次元を求めるために、各軌道点を標本点として平均をとると

$$C(\epsilon) \equiv \langle C_i(\epsilon) \rangle = \frac{1}{N^2} \sum_{i,j=1}^N H(\epsilon - |\vec{x}_i - \vec{x}_j|) \quad (5)$$

となる。これは相関積分とよばれる量である。この定義ではすべての軌道点間の距離を求めているが、軌道上で平均をとる方は間引いてもよい。この場合は

$$C(\epsilon) \equiv \langle C_i(\epsilon) \rangle = \frac{1}{NM} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N H(\epsilon - |\vec{x}_i - \vec{x}_j|) \quad (6)$$

となる。統計的精度さえ許せばMはNよりも十分小さい数で構わない。軌道がフラクタル構造を持つとき、相関次元Dはεの十分小さいところで、一定値に収束し、

$$D = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log C(\epsilon)}{\log \epsilon} \quad (7)$$

と定義される。次元が距離εに依存する場合は

$$D = \frac{d \log C(\epsilon)}{d \log \epsilon} \quad (8)$$

と定義される。

4. 相関次元の計算例

実際に相関次元を求める場合にはどのように時系列データをd次元空間に埋め込むかが重要になる。つまり、ベクトル間隔t, 追跡間隔τの選び方である。これを具体的な例を用いて説明する。図1はJIPP TII Uトカマクにおいてマイクロ波反射計で測定した信号である。プラズマ電流、電子密度が定常状態にある時間160-240 msecのデータを用いる。マイクロ波反射計の信号は電子密度揺動を反映する。図1(a), (b), (c)は異なった時間スケールで表示したもので非周期的で様々な周波数成分を含むことがわかる(図2(a))。また、自己相関関数はガウス型ではなくロングタイムテイルを持っている(図2(b))。このような信号に対しては、普通のスペクトル解析が有効でないと予想される。スペクトル解析は系が少数の単一周波数の線形な重ね合わせとみなせる場合に有効である。非線形性が強い場合や、この例のように特長的な周波数を持たない場合は有効ではない。このような信号のフラクタル次元を求めることが出来て、他の測定量のフラクタル次元と比較することが出来れば、それらが同じ現象を表しているかの判断ができる。

図3(a)は相関積分をd次元空間の距離εの関数として示したものである。距離は以下のように定義する。

$$|\vec{x}_i - \vec{x}_j| = \frac{1}{d} \sum_{k=1}^d \text{abs}(x(t_i + (k-1)t) - x(t_j + (k-1)t)) \quad (9)$$

次元dとしては2, 4, 8, 16をとり、t, τは25.6 μsである。この時のd次元空間上の点の数Nは約

3000点である。図3(b)は(5)式を用いて相関次元を求めたものである。 ϵ の大きいところでは相関積分 $C(\epsilon)$ が飽和して次元は0に近づく。これは d 次元空間上で軌道が有限の範囲内にあるためである。 ϵ を小さくしていったときに、 $d=2, 4$ の場合は d に等しい値に飽和している。このことは系の自由度がもっと大きい値であることを示唆する。 $d=8$ の場合は $d=8$ への飽和の傾向が見られる。 ϵ の小さいところでのばらつきは軌道点の数が少ないための統計的なばらつきである。 $d=2, 4, 8, 16$ と埋め込む次元が増えていくに従ってデータ（隣接した軌道点）の存在する ϵ の下限が大きくなっていく。 $d=16$ の場合は軌道の有限性がきいている領域に ϵ の下限が存在し、 D の飽和が見られない。これは、軌道点の数が一定の場合には埋め込む次元が増えていくにしたがって、軌道点間の平均距離が長くなっていくためである。これらのことから高次元の空間に埋め込む場合は十分な数の軌道点が必要であることがわかる。

軌道点の数を増やすもっとも簡単な方法はベクトル間隔及び追跡間隔を小さくすることであるが、これは以下に示すように限度がある。時系列データが最大値付近と最小値付近を往復する時間スケールを τ_0 とする。ベクトル間隔 t が τ_0 に比べて十分短いときには各成分が独立でなくなる。つまり $x_{10}=x_{11}, x_{11}=x_{12}, \dots, x_{ij}=x_{i(j+1)}$ という関係が成立する。この時、埋め込んだ空間で軌道は押し潰された分布をし、実質的な埋め込み次元が減少する。このことは図4のように直観的に説明できる。押し潰された空間で正しい次元を求めるためには ϵ の十分小さいところでの次元を求めなければならない。軌道が押し潰されているかどうかは各成分の相関係数を計算することによって調べることができる。

次に、追跡間隔 τ を小さくすることを考える。 τ を小さくすることによって軌道点の数は増え、精度を増すことができるが、あまり小さく取ると ϵ の小さいところでの次元が1次元ぐらいになってしまう。図5にその様子をしめした。図5(a)は単純に τ を小さくした場合で、図5(b)は標本点の近傍の追跡間隔の小さい軌道点を除いた場合である。図5(b)は(a)の場合に比べて多少改善されているが ϵ を大きくしていくと、近接した軌道を見つけ、次の軌道を見つけるまではおよそ1次元的に距離 ϵ 以内の軌道点の数が増えていく。図6は t, τ を小さくして軌道点を約6000点に増やして計算した例で、 ϵ の小さいところで、計算された次元が小さくなっているのがわかる。とくに埋め込み次元 d が大きいところではその影響が ϵ の広い範囲にわたり、次元の飽和する領域が見られない。以上のことから、 t, τ ともあまり小さくは出来ず、 t については τ_0 程度が下限で、 τ については結果的な軌道点の分布において近接した軌道どうしの距離と追跡間隔 τ の軌道点の距離がほぼ等しくなるように取るのがもっとも効率がよい事がわかる。よく行なわれる t, τ の選び方は典型的な信号の周期 (τ_0) の数分の1に選び、 $t=\tau$ とするやり方である。 $t=\tau$ とすることは(1)-(3)式からわかるように座標軸を回転させる効果があり、 d 次元空間での分布を等方化する役割を持っている。

次に別な観点から埋め込みの操作を考えてみよう。埋め込みの目的は D 次元の現象を d 次元のベクトルで表すことである。ここで、相空間において、軌道が元の軌道の近傍にまで戻ってくる周期を τ_0 とする。 d 次元のベクトルの分布する時間 dxt は τ_0 と等しいときにもっとも効率がよいと考えられる。つまり、埋め込み次元 d は D 程度ですむと考えられる。 dxt が τ_0 に比べて、小さいときはゆっくりとした変動がとりこまれず、逆に大きいときは速い変動がとりこまれない。時系列データの周波数スペクトルが平坦である場合は、 D 次元の軌道を表すにはかなり大きな埋め込み次元 d が必要であると予想される。

さて、解析しようとするデータが図1(b)に示されるように典型的な時間（相関時間）をもたない場合を便宜的に2通りの場合に分ける。1つは与えられた有限の長さの信号からは求められないほど次元が高い場合。もう一つはうまく埋め込んでやれば次元を求めることができる場合である。後者の場合について考える。典型的な時間スケールを持たないことから、埋め込む時にできるだけ少ない次元でゆっくりした変動と早い変動をとりこむ必要がある。言い換えれば、埋め込もうとす

る次元 d が与えられたときにできるだけ広い時間スケールをとりこむ必要がある。この時の一つの方法は下のように非等間隔のベクトル間隔を用いて、 d 次元のベクトルを構成する方法である。

$$\vec{x}(t_i) = (x(t_i), x(t_i+t), x(t_i+2^2t), \dots, x(t_i+(d-1)^2t)) \quad (10)$$

$$\tau = t = t_{i+1} - t_i \quad (11)$$

これによって時間スケール t の現象から時間スケール $(d-1)^2t$ の時間スケールの現象をとりこむことができる。図 7 は(10)式を用いて $d=8, 10, 12, 14, 16$ の場合の計算をした例である。この例ではこの方法でも次元の飽和は見られない。

5. 周波数フィルタの影響

系が高次元の場合には十分密な軌道点が必要であるが、このためには時系列データが長時間にわたって定常的でなければならない。データが対象としている現象とは周波数領域の全く異なった成分を含む場合がしばしばあるが、この時はこの成分を取り除かなければ十分密な軌道を得られない可能性がある。よく使われるフーリエ変換を用いた周波数フィルタは時系列データのすべての点を使うのでフラクタル次元を保存しない可能性がある。フラクタル次元を保存するためには線形な変換によって周波数フィルタを構成すればよい。例えば次の変換

$$\vec{x}(t_i)_j = \sum_{k=1}^d a_{kj} \vec{x}(t_i)_k \quad (12)$$

に対しては、フラクタル次元は保存される。但し、注意しなければならないのはベクトルの構成の方法によって取り除ける周波数成分の範囲が決まってしまうことである。ベクトル間隔よりも速い成分や、ベクトルの分布する時間よりもゆっくりとした成分は取り除けない。より、高度な手法を開発する必要がある。

6. まとめ

カオス解析の手法は今までにないデータの見方を与えてくれる。特にフラクタル次元はその一般性のため、時系列データの解析において強力な道具となりうる。しかし、実際の実験データから次元を求めるためには注意が必要である。特に次元の高いデータの場合には十分な長さのデータが必要である。これは相空間において、十分密な軌道を得ることと同等である。限られたデータから次元を求める場合にはできるだけ効率よく埋め込みを行ない、必要な埋め込み次元をできるだけ少なくすることが重要である。このためには埋め込んだ空間での軌道の相関が大きくないことやベクトル構成の方法を工夫する必要がある。その一つの方法はベクトルを作るときの時間差を非等間隔に選ぶという方法である。また、次元の高い系の測定データは十分定常的と見なせないことが多く、フラクタル次元を保存する周波数フィルタの開発が求められる。

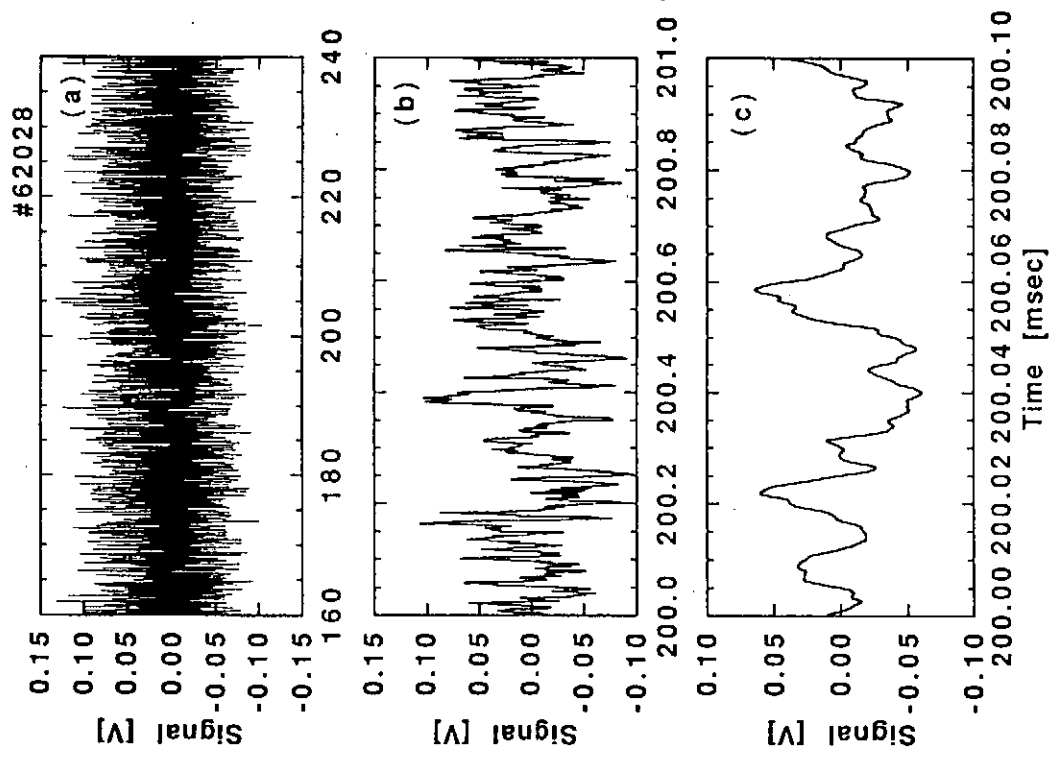


図1 様々な時間スケールで見たマイクロ波反射計の信号

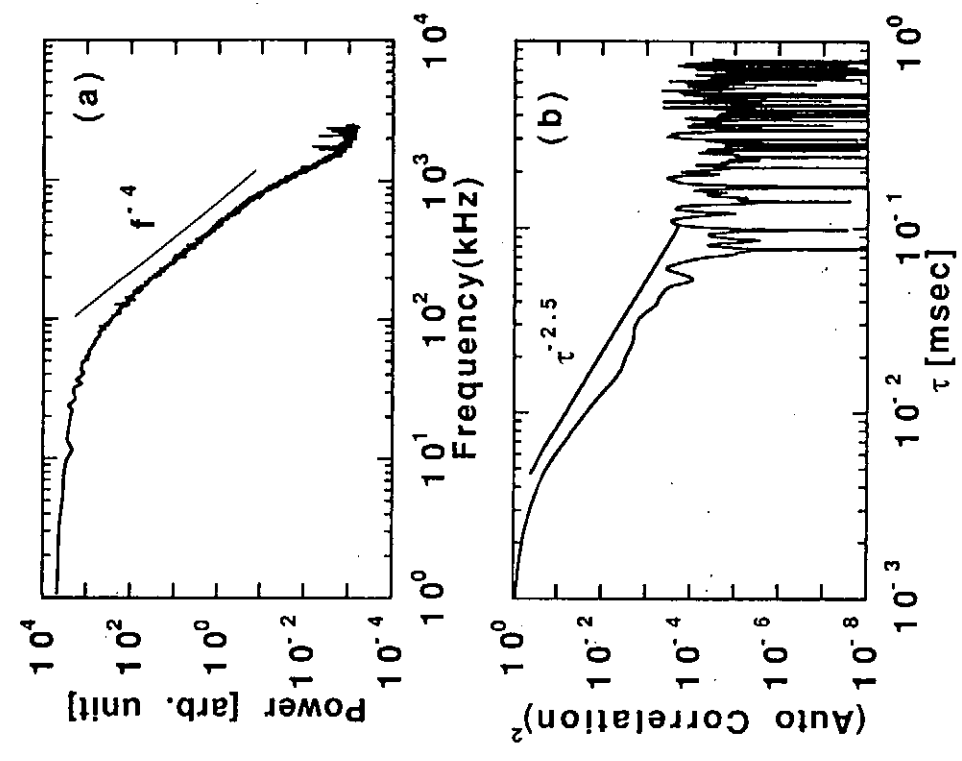


図2 マイクロ反射計の信号のパワースペクトル (a) と自己相関関数 (b)

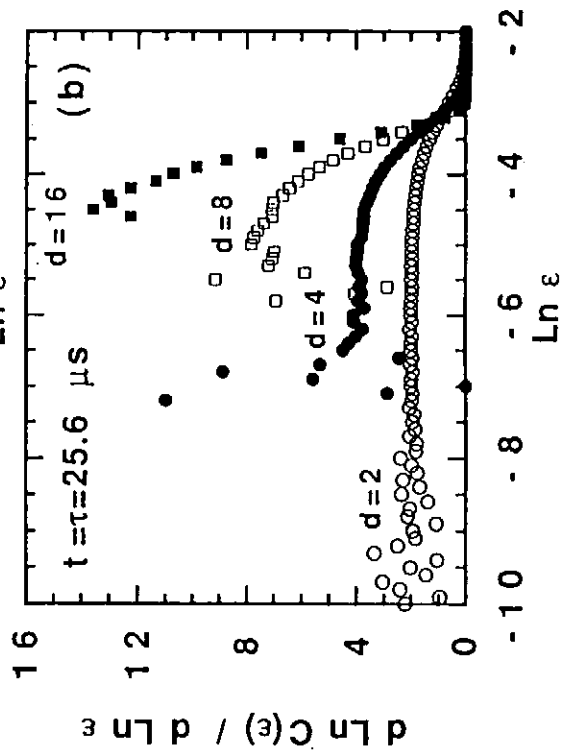
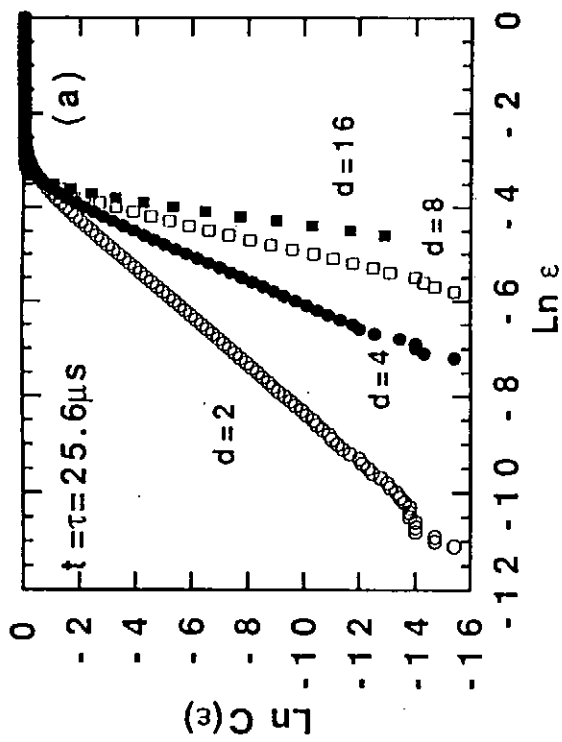


図3 埋め込み次元が2, 4, 8, 16の時の距離 ϵ に対する相関積分 $C(\epsilon)$ の変化 (a) と傾きから求めた相関次元の変化 (b)

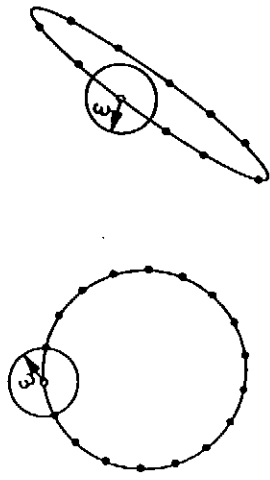


図4 正常な場合と軌道が押し潰された場合の軌道点 (O) と標本点 (●) の様子

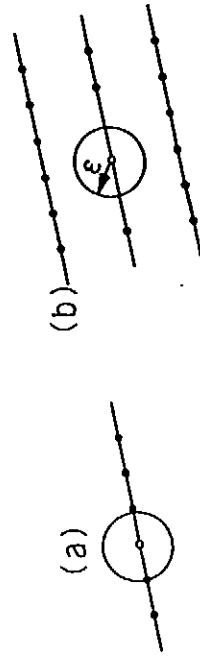


図5 追跡時間を短くしたときの軌道点の (O) と標本点 (●) の様子。
(a) は単純に追跡時間を短くした状態で (b) は標本点付近の軌道点を除いた場合を示す。

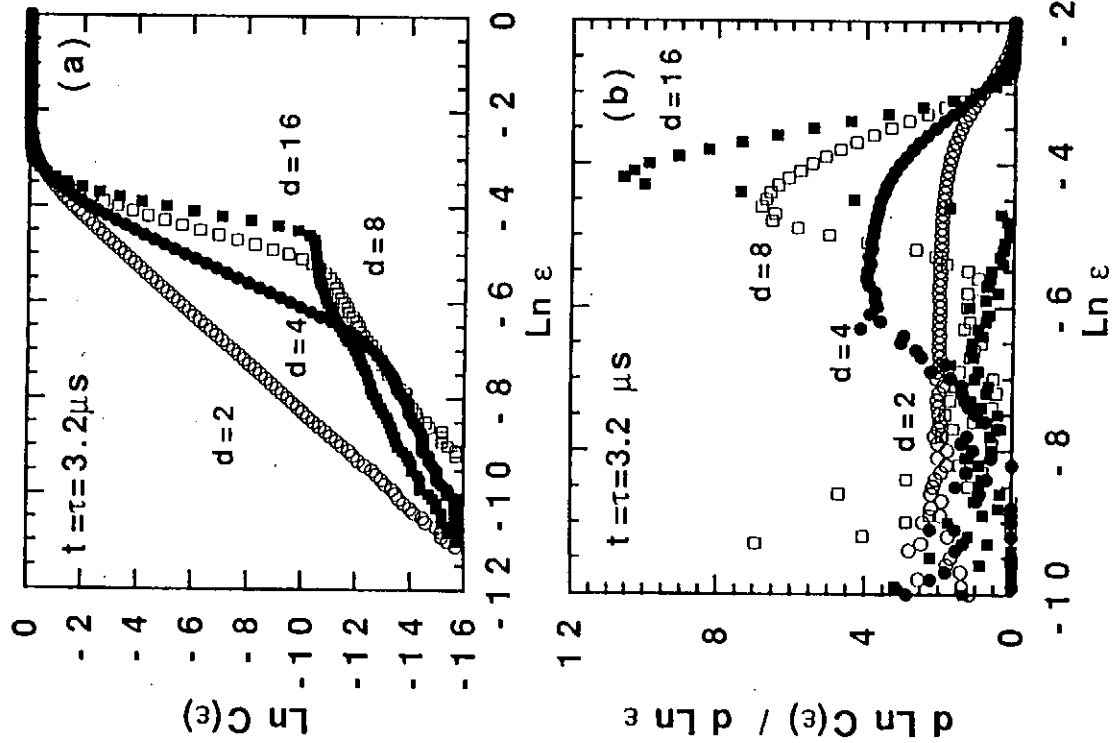


図6 追跡時間、を短くしたときの時の距離 ϵ に対する相関積分 $C(\epsilon)$ の変化 (a) と傾きから求めた相関次元の変化 (b)

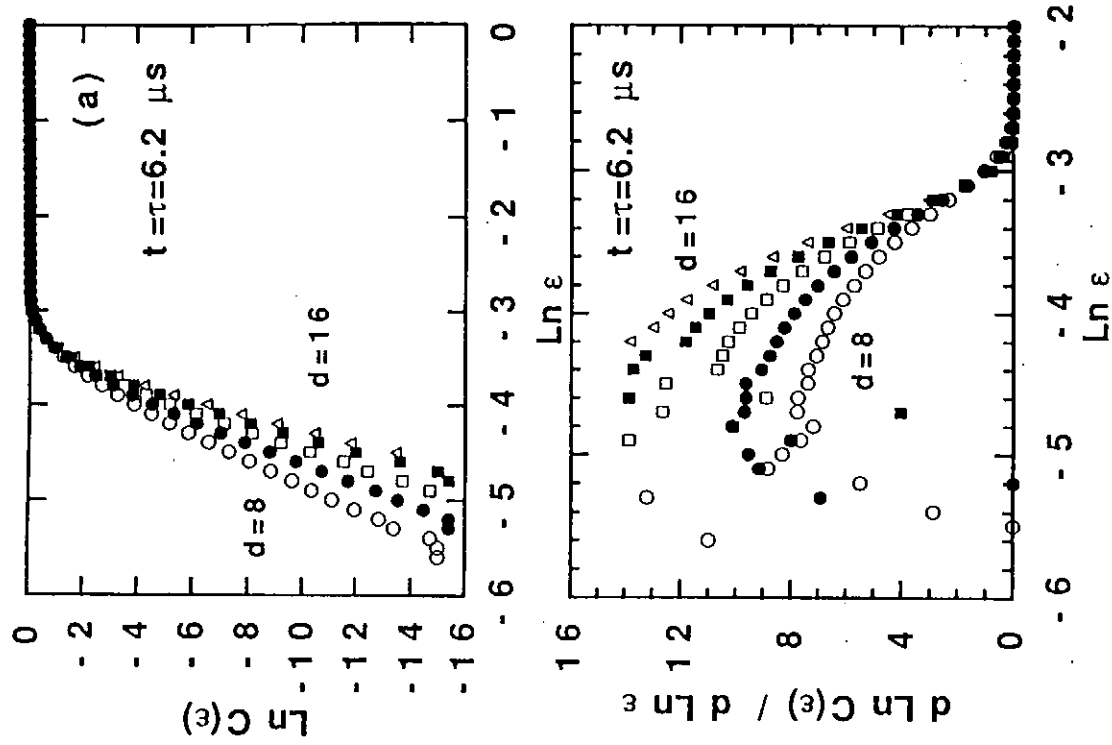


図7 ベクトル間隔を非等間隔に取ったときの距離 ϵ に対する相関積分 $C(\epsilon)$ の変化 (a) と傾きから求めた相関次元の変化 (b)。埋め込み次元が 8 (○), 10 (●), 12 (□), 14 (■), 16 (△) の場合。

A reduced model of chaotic magnetic fluctuations in a tokamak plasma

Y. YAMAKOSHI, Y. SAKURAGI and Z. YOSHIDA
Department of Nuclear Engineering, The University of Tokyo
Hongo, Tokyo 113, Japan

Abstract

Nonlinear interactions of tearing modes result in chaotic magnetic fluctuations. A system of ordinary differential equations has been derived to model the nonlinear interactions of magnetic islands with different helicities. For a reasonable set of parameters, the solution shows chaotic behavior.

1 Introduction

Magnetic-field perturbations induced by tearing instabilities change the field-line structure in a tokamak plasma to generate magnetic islands, and their overlapping leads to magnetic chaos. A magnetic loop placed in a peripheral region picks up time series of magnetic fluctuations. Sometimes one observes a very coherent oscillations, so-called Mirnov oscillations (see e.g. Mirnov & Semenov 1971), which are considered to be induced by rotation of an island (Ware 1962). More generally, complex waveforms are observed, suggesting that a complicated field-line structure exists in the plasma. Recently some attempts have been made to estimate fractal dimensions of time series data of magnetic fluctuations (see Prado & Fiedler-Ferrari 1991, and papers cited therein). In this paper we introduce a system of ordinary differential equations to describe nonlinear interactions of magnetic islands. The system of nonlinear equations has an formal analogy of the Lorenz model of the Bénard convection (Lorenz 1963), as well as other models of nonlinear dynamical systems (Funakoshi & Inoue 1988; Kambe & Umeki 1990; Nakamura 1991). The derivation of the equations, however, uses an unusual method. We describe some numerical results showing chaotic behavior of the mode interactions.

A basic idea of reducing the original partial differential equations of magnetohydrodynamics into the set of ordinary differential equations is the application of the force-free condition $\nabla \times \mathbf{B} = \lambda \mathbf{B}$ to approximate the structure of the magnetic field \mathbf{B} . By this relation the spatial derivatives are converted into multiplication of a scalar function λ . To model the evolution of λ , we invoke a quasilinear turbulence model of tearing modes (Boozer 1986; Strauss 1986; Yoshida & Hasegawa 1991). The reduction technique used here thus differs from other theories which appeal to functional expansions or Galerkin's method (see e.g. Shan *et al.* 1991). In sections 2 and 3, we derive a reduced model of magnetic fluctuations. In section 4, some numerical results are presented.

2 Basic assumptions

We consider a tokamak type magnetohydrodynamic (MHD) plasma. We decompose the magnetic field $\mathbf{B} = \mathbf{b} + \mathbf{B}_0$. Here \mathbf{b} is the fluctuating component and \mathbf{B}_0 is the ambient component, which can be approximated by a vacuum (harmonic) field, i.e. $\nabla \times \mathbf{B}_0 = 0$. We may assume $b \ll B_0$. For simplicity, we approximate the toroidal plasma by a straight cylindrical plasma column, and assume that \mathbf{B}_0 is parallel to ∇z .

We consider tearing instabilities in a low beta plasma. The instability growth rate is sufficiently small, so the magnetic field is approximated by a force-free field neglecting the pressure and the inertia forces. The force-free condition is

$$\nabla \times \mathbf{B} = \lambda \mathbf{B}, \quad (1)$$

where λ is scalar function that should satisfy

$$\mathbf{B} \cdot \nabla \lambda = 0, \quad (2)$$

because $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$. The condition (2) demands $\nabla \lambda = 0$ in each neighborhood of the resonance, where field lines are assumed to be chaotic and two different radial points have a relatively short connection length. Therefore, we may consider λ as an eigenvalue which characterizes the magnetic field structure in each resonant region. We note that the flattening of λ parallels the flattening of the current profile \mathbf{j} in the vicinity of a magnetic island, because $\mathbf{j} = \lambda \mathbf{B} / \mu_0 \approx \lambda \mathbf{B}_0 / \mu_0$. Since $\nabla \times \mathbf{B}_0 = 0$, (1) reads as

$$\nabla \times \mathbf{b} = \lambda(\mathbf{b} + \mathbf{B}_0). \quad (3)$$

The magnetic fluctuation in the direction parallel to \mathbf{B}_0 is neglected, because we consider a low beta plasma, i.e. may assume

$$\mathbf{b} \cdot \mathbf{B}_0 = 0. \quad (4)$$

The tearing-mode turbulence results in an internal electric field $\langle -\mathbf{v} \times \mathbf{b} \rangle$. This effect of the turbulence is represented by a hyper-resistivity (Boozer 1986; Strauss 1986). We use an ensemble-averaged field-aligned component of Ohm's law such as

$$E_{\parallel} = \eta j_{\parallel} - \nabla \cdot (\eta^{(2)} \nabla j_{\parallel,0}). \quad (5)$$

Here η denotes the resistivity, which is assumed to be constant for simplicity. The quasilinear hyper-resistivity is given by

$$\frac{\eta^{(2)}}{\mu_0} = \frac{1}{2} \sum_k \frac{\gamma_k}{(\partial_r k_{\parallel})^2} |b_{r,k}|^2 \ln \left(\frac{\gamma_k^2}{(r - r_k)^2 + \gamma_k^2 / (\partial_r k_{\parallel})^2} \right), \quad (6)$$

where the subscript k indicates a Fourier component of the fluctuation that is resonant to the ambient magnetic field at $r = r_k$ (Strauss 1986). The growth rate is denoted by γ_k , and the parallel wave number by k_{\parallel} . We denote $E_{\parallel}^{(2)}$ the second term on the right-hand side of (5), which represents the internal electric field $\langle -\mathbf{v} \times \mathbf{b} \rangle$ induced by the tearing mode turbulence. We model the internal electric field by using $E_{\parallel}^{(2)}$ with an appropriate transport coefficient that resembles (6), and hence we do not solve the momentum equations to estimate \mathbf{v} for $\langle -\mathbf{v} \times \mathbf{b} \rangle$.

We assume a steady and uniform Hall velocity \mathbf{V} of the plasma in the direction parallel to \mathbf{B}_0 . Perpendicular flow can also be considered, however, we omit it for simplicity. This uniform flow does drive any instability in the present model, while it causes oscillations in the observed fluctuation signals (Mirnov oscillation; see Ware 1962).

3 Reduced equations

We reduce the MHD equations into a set of ordinary differential equations using the assumptions described in §2. The evolution of the magnetic field is governed by Ohm's law including the induction terms associated with the steady parallel flow \mathbf{V} and the fluctuation \mathbf{v} ; The latter is represented by the quasilinear term $E_{\parallel}^{(2)}$,

$$\partial_t \mathbf{b} = -H \nabla \times (\nabla \times \mathbf{b}) + \nabla \times (\mathbf{V} \times \mathbf{b} - E_{\parallel}^{(2)} \nabla z). \quad (7)$$

Here the magnetic field \mathbf{b} is normalized by B_0 , the coordinates are normalized by the minor radius a , and time is in Alfvén units $\tau_A = a/c_A$, where c_A is the Alfvén speed $B_0/(\rho\mu_0)^{1/2}$, ρ is the mass density, and μ_0 is the vacuum permeability. The magnetic Reynolds number is $H^{-1} = ac_A\mu_0/\eta$. Using (3), we obtain

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{b}) = \lambda^2 \mathbf{b} + \nabla \lambda \times (\mathbf{b} + \mathbf{B}_0).$$

Using (4) we obtain

$$\nabla \times (\mathbf{V} \times \mathbf{b}) \approx -(\nabla \times \mathbf{b}) \times \mathbf{V} = -\lambda \mathbf{b} \times \mathbf{V}.$$

Let r be the radial coordinate and φ be an angle coordinate such that $\nabla\varphi \times \nabla r = \nabla z$. Denoting $p = b_r$ and $q = b_\varphi$, (7) now reads as

$$\partial_t p = -H\lambda^2 p - V\lambda q \quad (8)$$

$$\partial_t q = -H\lambda^2 q + V\lambda p + B_0 \partial_r \lambda + \partial_r E_{\parallel}^{(2)}. \quad (9)$$

By (2), $\partial_r \lambda = 0$ in each neighborhood of the resonance. We thus may approximate the radial distribution of λ by an even function with respect to the resonant radius. The essential contribution to the turbulence term is given by

$$\partial_r E_{\parallel}^{(2)} = 2(\partial_r \eta^{(2)}/\mu_0) \partial_r^2 \lambda.$$

Here we have used the relation $j_{\parallel,0} \approx \lambda B_0/\mu_0 = \lambda/\mu_0$ in the normalized units.

The evolution of λ is calculated by the helicity transport equation (Yoshida & Hasegawa 1991). Under the Coulomb gauge condition, we thus may write $\mathbf{B} = \lambda \mathbf{A}$ in the neighborhood of each resonance. This expression warrants (1) because (2) demands $\nabla \lambda = 0$. We define the helicity density

$$h = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \lambda A^2. \quad (10)$$

Using Maxwell's equations, we observe

$$\partial_t h = -2\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} - \nabla \cdot \mathbf{F}, \quad (11)$$

where the helicity flux is defined by $\mathbf{F} = \phi \mathbf{B} + \mathbf{E} \times \mathbf{A}$ with the scalar potential ϕ . Using (10) and ignoring helicity flux due to $\phi \mathbf{B}$, we may write (11) as

$$\partial_t \lambda = -A^{-2} \nabla \cdot \mathbf{F}. \quad (12)$$

The helicity flux is divided into two distinct parts. One is the internal term that is induced by spontaneous fluctuations driven by the tearing instability. The internal term $\nabla \cdot \mathbf{F}_i$ parallels the hyper-resistivity effect, $-B_0 \nabla \cdot (\eta^{(2)} \nabla j_{\parallel,0})$ (Yoshida & Hasegawa 1991). Since $j_{\parallel,0} \approx \lambda B_0/\mu_0$, we may approximate $\nabla \cdot \mathbf{F}_i \approx -(B_0^2 \eta^{(2)}/\mu_0) \partial_r^2 \lambda$ (B_0 is normalized to the unity). Here $B_0^2/A^2 \approx B^2/A^2 = \lambda^2$. In view of (6), we write $\eta^{(2)}/\mu_0 = C \langle p^2 \rangle$ and

$$A^{-2} \nabla \cdot \mathbf{F}_i = -C \langle p^2 \rangle \lambda^2 \partial_r^2 \lambda \quad (13)$$

Here $\langle \cdot \rangle$ denotes the ensemble average, and C is of the order of $\gamma/(\partial_r k_{\parallel})^2$; cf. (6). We estimate

$$\partial_r k_{\parallel} \approx k_{\perp} \partial_r B_{\varphi}/B_0 = k_{\perp} \mu_0 j_{\parallel,0}/B_0. \quad (14)$$

The other part of the helicity flux corresponds to the external driving electric field for the plasma current. Such an electric field does not contribute any magnetic field in the plasma region, so it should be dealt separately. Let $\mathbf{E}_h = -\partial_t \mathbf{A}_h$ be a harmonic electric field such that $\nabla \times \mathbf{E}_h = 0$ in the plasma region, which

corresponds to the transformer induction. The helicity flux resulting from such an external induction yields $-\nabla \cdot \mathbf{F}_e = 2E_h B_0 = E_h$. Now (12) reads as

$$\partial_t \lambda = C \langle p \rangle^2 \lambda^2 \partial_r^2 \lambda + E_h \lambda^2 \quad (15)$$

We consider nonlinear interactions of magnetic fluctuations with different helicities located in different radial positions. We introduce a system of ordinary differential equations that are derived from (8), (9), and (15) by discretizing the radial coordinate. Between different resonant regions, the tearing-mode interactions transport the helicity. Such interactions are represented by variations in λ . Each radial area is indexed by n . We denote f_n the local value of a function f at the radial grid n . Let Δ_n be the radial distance between the $n - 1$ and $n + 1$ grids. By approximating the radial derivatives by finite differences, we obtain

$$\dot{p}_n = -H \lambda_n^2 p_n - V \lambda_n q_n \quad (16)$$

$$\dot{q}_n = -H \lambda_n^2 q_n + V \lambda_n p_n + 2C \frac{\langle p_{n+1} \rangle^2 - \langle p_{n-1} \rangle^2}{\Delta_n} \frac{\lambda_{n+1} + \lambda_{n-1} - 2\lambda_n}{\Delta_n^2} \quad (17)$$

$$\dot{\lambda}_n = \lambda_n^2 \left(C \langle p_n \rangle^2 \frac{\lambda_{n+1} + \lambda_{n-1} - 2\lambda_n}{\Delta_n^2} + E_h \right) \quad (18)$$

Here $\langle p \rangle$ has been approximated by the local value $\langle p_n \rangle$, and C has been assumed to be a constant. We should choose an appropriate number of grids that corresponds to the number of interacting islands with different helicities. At the boundaries of the turbulent region, λ is connected to the equilibrium λ , which is determined by the equilibrium field structure. Boundary values of p and q are zero.

As discussed above, the essential coefficient in the turbulence terms is $\partial_r^2 \lambda$. Therefore, the nonlinear interactions lead λ to a diffused relaxed distribution that minimizes $(\partial_r \lambda)^2$. We observe that this effect is properly included in (17) and (18). Inhomogeneous boundary value of λ , which parallels a gradient of $j_{\parallel,0}$, together with the external drive E_h activate interactions by driving evolution of λ .

4 Numerical results

In this section we show that the solution of the reduced model (16)-(18) exhibits chaotic behavior for a set of reasonable parameters. We note $\lambda = \mu_0 j_{\parallel,0} / B_0 \approx \epsilon \iota / \pi$ in the normalized units, where ϵ is the inverse aspect ratio and ι is the rotational transform. We thus see that the equilibrium λ is of the order of unity in a tokamak. Table 1 summarizes typical ranges of parameters for a tokamak plasma and values of them for which we have calculated solutions of the model equations. The boundary conditions are shown in Table 2.

Figure 1 shows the Feigenbaum diagram for the varied values of E_h . Here Feigenbaum diagram is drawn by plotting the maximum points of the time series from which we take off its transient state. Because of the complexity of the nonlinear terms of the model equations, however, the diagram shown below does not represent a period-doubling tree globally. Nevertheless it still helps us distinguish between periodic and chaotic states. In Fig.1, the behavior of the solution changes to chaos when E_h is ranging from 0.7×10^{-8} to 0.81×10^{-8} . This transition seems period-doubling bifurcation though we cannot find Feigenbaum's number. The time series and power spectra for the parameter $E_h = 0.7 \times 10^{-8}$, 0.8×10^{-8} and 0.81×10^{-8} are shown in Figs.2-(a), (b), and (c). On the other hand, the transition in the range of E_h from 2.0×10^{-8} to 2.5×10^{-8} is not the same as the above process but the behavior of the solution changes directly from order to chaos. Figure 2-(d) shows the time series and spectrum for the parameter $E_h = 2.5 \times 10^{-8}$. From this figure, the type of this transition seems intermittency. As mentioned above, the scenario to chaos is never unique but various when the nonlinearity is very complicated.

Figure 3 shows the Feigenbaum diagram for the varied parameter $H^{-1} \equiv R$. In this diagram, both the transition from order to chaos and that from chaos to order are also observed. The latter one is the inverse of period-doubling bifurcation, which is shown in Figs. 4(c) and (d). The former transition is not bifurcation but another scenario. Figure 4(b) shows that the behavior of the solution is chaotic, though it does not identify the type of that transition.

All of the above results are simulated for two modes interactions ($N = 2$). Here we consider the interactions of three resonant regions ($N = 3$). Although all parameters for $N = 2$ are the same as those for $N = 3$, the behavior of the solution is periodic for $N = 2$ (Fig. 5(a)) while it turns chaotic as N increases to 3 (Fig. 5(b)).

Table 3 shows the first and second Lyapunov exponents and the Lyapunov dimensions of the solutions simulated above. They provide a characterization of dynamical behavior. From this table and the above results, we find that systems whose first Lyapunov exponents are positive tend to be chaotic and that the Lyapunov dimensions of chaotic systems are larger than those of periodic systems. Furthermore the Lyapunov dimension for $N = 3$ increases to the extent that any dimensions for $N = 2$ cannot reach.

5 Summary and discussion

A system of ordinary differential equations has been derived to model the nonlinear interactions of magnetic islands with different helicities. A key step of reducing the original MHD equations is the approximation of the internal magnetic fields by force-free fields by assuming a low pressure and slow instabilities. This approximation enables us to replace the curl derivatives in the original partial differential equations by the multiplications of the force-free parameter λ . Fourier transforms also convert derivatives into multiplication of wave numbers. The present method, however, differs from Fourier transforms because the magnetic field structure is completely determined by a single value of λ . By assuming the force-free condition in the region where λ is constant, the field structure reduces from the distributed parameter system to a lumped parameter system. We also note that λ may take any real number (see Yoshida & Giga 1990), and hence even a summation of different modes increases the dimension of the dynamics in the phase space. In the case of Fourier expansion, wave numbers are restricted by the periodicity. The ratio of two wave numbers thus are rational, so a summation of different modes does not change the dimension.

The other important aspect of the preset reduced model is the use of the quasilinear-type transport coefficients based on ensemble averaged fluctuation energy. We do not solve the momentum equation directly, while we assume quasilinear turbulent interactions which induce a second order internal electric field $E_{\parallel}^{(2)}$. The growth rates of tearing instabilities are assumed *a priori* to model a turbulent media. The essential nonlinear effect is the modification of the field-structure coefficient λ resulting from the helicity transport induced by the turbulence, which is described by (18). A more sophisticated model might be possible by generalizing the quasilinear effect to a stronger nonlinear interactions.

The reduced equations (16)-(18) have a formal similarity with the Lorenz equations. The equations (16) and (17) have damping terms, which are proportional to H , and a couple of oscillation generators, which are proportional to V . A frequency modulation occurs through a change in λ_n . By increasing N , we study higher dimensional dynamics, while the fundamental structure of the equations are not changed. In this paper typical numerical results are presented to demonstrate that the present model yields chaotic solutions. More detailed and systematic simulation results will be published elsewhere.

The authors are grateful to Professor M. Wakatani and Professor T. Hatori for their suggestions and discussions. The authors also acknowledge discussions with the REPUTE experiment group of the University

of Tokyo. This work was supported by a Grant-in-Aid for Scientific Research from the Japanese Ministry of Education, Science, and Culture (No. 03680004).

References

- [1] BOOZER, A. H. 1986 J. Plasma Phys. 35, Part 1, 133.
- [2] FUNAKOSHI, M. & INOUE, S. 1988 J. Fluid Mech. 192, 219.
- [3] KAMBE, T. & UMEKI, M. 1990 J. Fluid Mech. 212, 373.
- [4] LORENZ, E. N. 1963 J. Atoms. Sci. 20, 130.
- [5] MIRNOV, S. V. & I.B. SEMENOV, I. B. 1971 Sov. J. Atomic Energy 30, 22.
- [6] NAKAMURA, M. 1991 J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA 38, 359.
- [7] PRADO, C. P. C. & FIEDLER-FERRARI, N. 1991 Plasma Phys. Controlled Fusion 33, 493.
- [8] SHAN, X., MONTGOMERY, D. & CHEN, H. 1991 Phys. Rev. A 44, 6800.
- [9] WARE, A. A. 1962 Nucl. Fusion Supplement, vol. 3, 869.
- [10] YOSHIDA, Z. & GIGA, Y. 1990 Math. Z. 204, 235.
- [11] YOSHIDA, Z. & HASEGAWA, A. 1991 Phys. Fluids B 3, 3059.
- [12] WOLF, A., SWIFT, J. B., SWINNEY, H. L. & VASTANO, J. A. 1985 Physica 16D, 285.
- [13] PEITGEN, H. O., JÜRGENS, H. & SAUPE, D. Chaos and Fractals (1992 Springer-Verlag N.Y., Inc.)

parameters	tokamak plasma	simulation		
λ	$1 \sim 10^{-1}$	—	—	—
$ p , q $	$10^{-2} \sim 10^{-4}$	—	—	—
H	$10^{-5} \sim 10^{-6}$	1.0×10^{-6}	$1/0.1 \sim 1/2.5 \times 10^{-6}$	$1/0.5 \times 10^{-6}$
C	$10^{-1} \sim 1$	1.0	1.0	1.0
Δ	$\sim 10^{-1}$	0.1	0.1	0.1
V	$10^{-3} \sim 10^{-5}$	7.72×10^{-5}	7.72×10^{-5}	7.72×10^{-5}
E_h	$10^{-7} \sim 10^{-8}$	$0.1 \sim 3.0 \times 10^{-8}$	1.0×10^{-8}	1.0×10^{-8}
N	—	2	2	2,3

Table 1: Typical ranges of parameters and variables to simulate experimental plasmas and the values for which we calculate in practice.

	λ_0	λ_{N+1}	p_0	p_{N+1}	q_0	q_{N+1}
$N = 2$	0.250	0.475	0	0	0	0
$N = 3$	0.250	0.475	0	0	0	0

Table 2: Boundary conditions of variables.

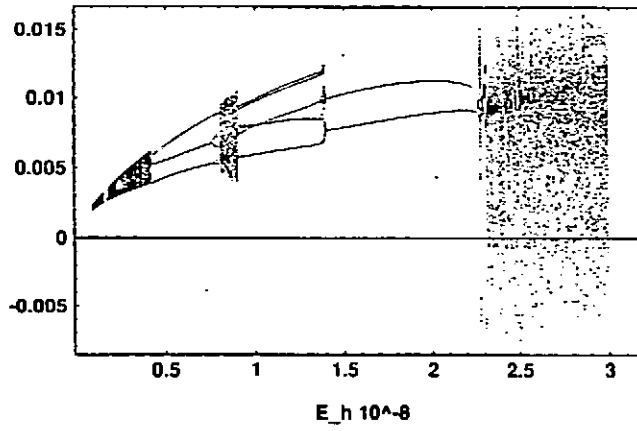


Figure 1: Feigenbaum diagram for the varied values of E_h .

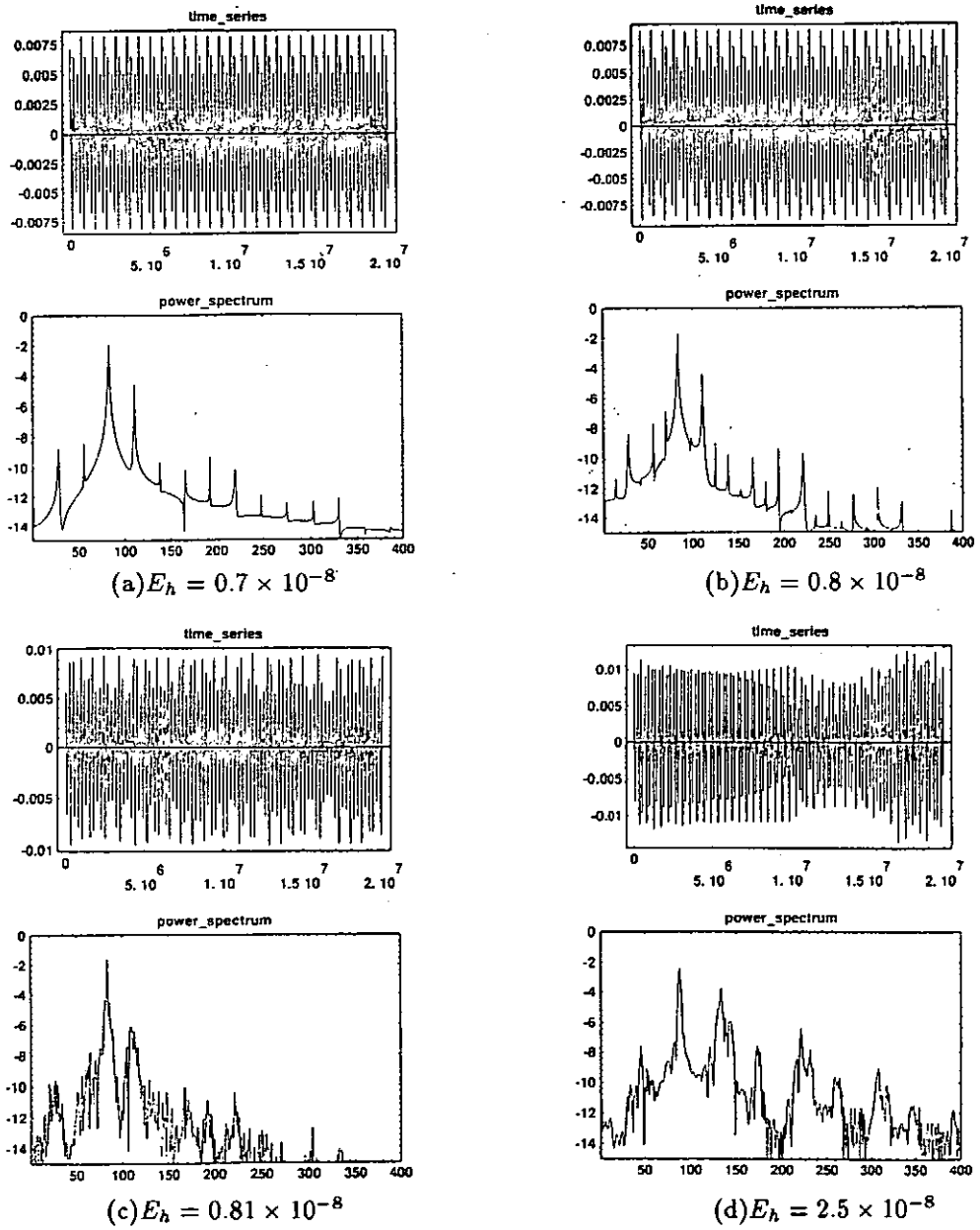


Figure 2: Time series and power spectra for the varied values of E_h .

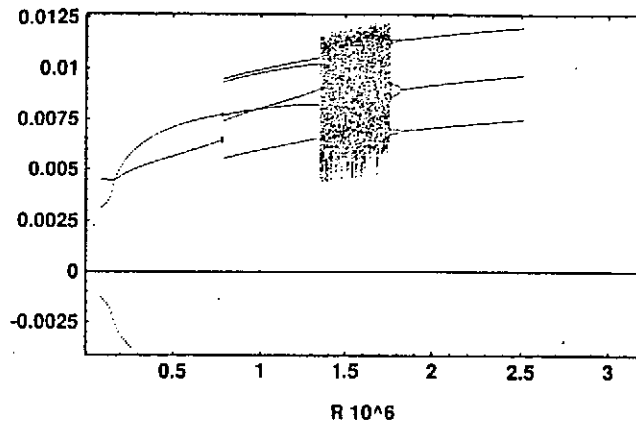


Figure 3: Feigenbaum diagram for the varied values of $R(= H^{-1})$.

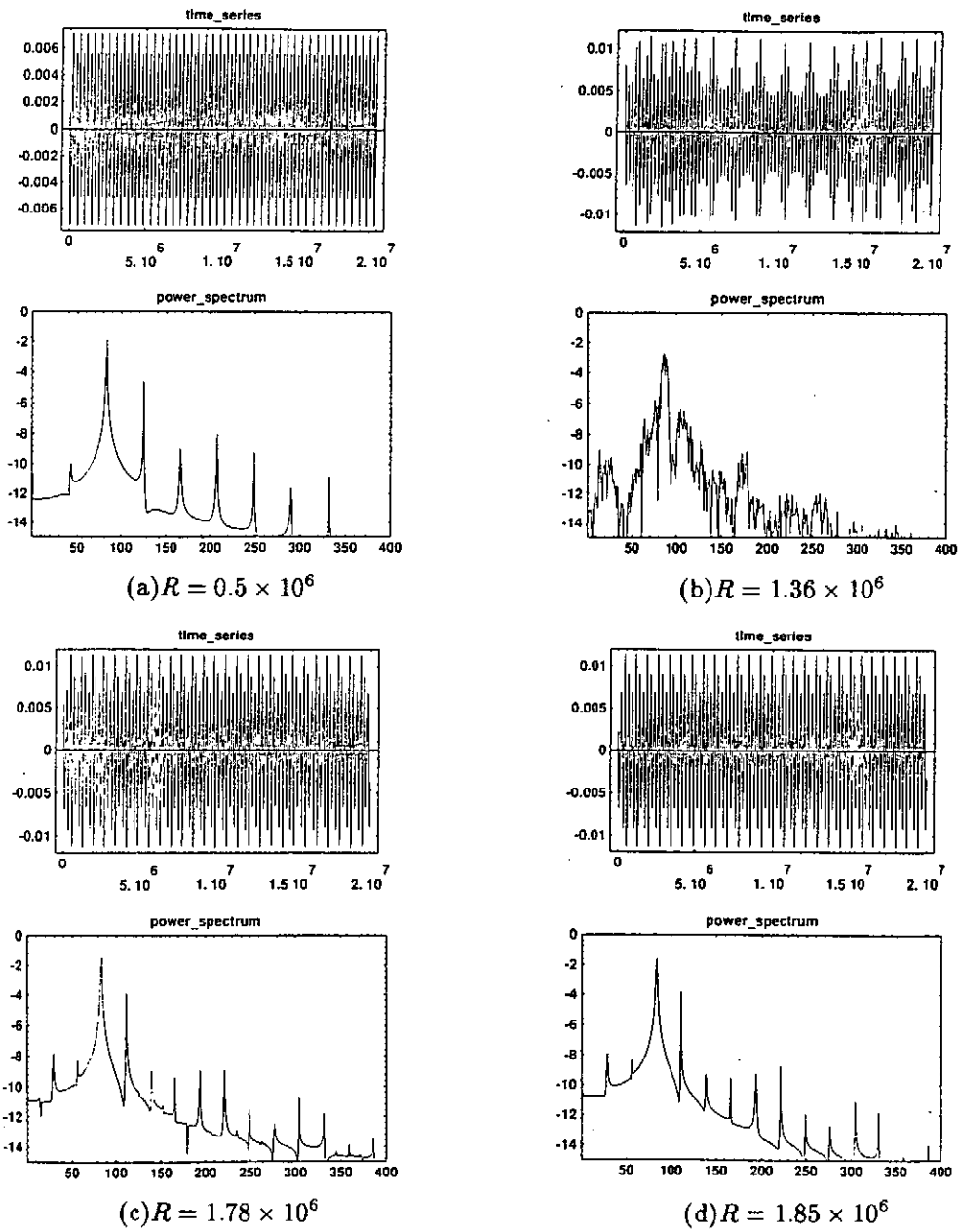


Figure 4: Time series and power spectra for the varied values of $R(= H^{-1})$.

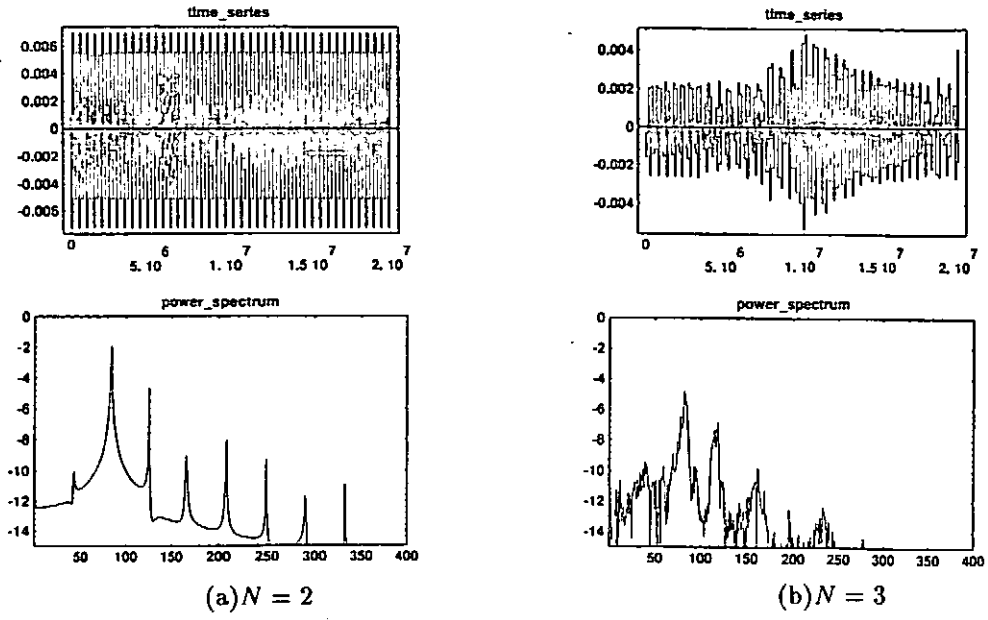


Figure 5: Time series and power spectra for $N = 2$ and $N = 3$.

$E_h/10^{-8}$	λ_1	λ_2	D_f
0.7	0.362×10^{-6}	-0.105×10^{-6}	2.53
0.8	0.241×10^{-6}	-0.409×10^{-8}	2.63
0.81	0.181×10^{-5}	-0.109×10^{-7}	3.56
2.5	0.616×10^{-6}	0.381×10^{-7}	3.42
$H^{-1}/10^5$	λ_1	λ_2	D_f
0.5	0.355×10^{-6}	-0.188×10^{-6}	2.34
1.36	0.171×10^{-5}	-0.121×10^{-7}	3.75
1.78	0.435×10^{-6}	-0.966×10^{-7}	2.73
1.85	0.422×10^{-6}	-0.868×10^{-7}	2.68
N	λ_1	λ_2	D_f
2	0.355×10^{-6}	-0.188×10^{-6}	2.34
3	0.132×10^{-5}	0.588×10^{-6}	5.10

Table 3: The first and second Lyapunov exponents and the Lyapunov dimensions for the various parameters.

RFPプラズマのダイナモ構造のシミュレーション解析

大阪工業大学工学部

長田 昭義

名古屋大学プラズマ科学センター

佐藤 紘一

電子技術総合研究所

芦田 久男

核融合科学研究所

天野 恒雄

1. はじめに

逆磁場ピンチ (RFP) プラズマはRFP配位の維持機構やトロイダル磁束の再生機構のような重要で興味ある物理課題を含んでいる。これはダイナモ作用、あるいはRFPダイナモと呼ばれている。これらの物理過程はRFPプラズマ中の大きなスケールの磁気流体的 (MHD) 不安定性の非線形発展の結果として理解されている。しかしながら、この原因となる関係や機構は理論的そして実験的な研究の両方において今だ十分に説明されていない。それ故、反転配位を維持する機構やトロイダル磁束の再生機構を理解するには、RFPプラズマのダイナモ作用の組織構造を解明することが重要である。

本研究では、3次元非線形抵抗性MHDシミュレーションを用いて、シングルヘリシティモードの非線形力学を通してRFPプラズマのダイナモ構造を明らかにする。特に、トロイダル磁束の増加に導くRFPダイナモを作り出すポロイダル電場の再生に対する磁気揺動とプラズマフローとの非線形相互作用によって誘起されるダイナモ電場の物理的機構に注目する (1)。

2. RFPのダイナモ構造

図1はトロイダル磁場分布 $B_z(r/a)/B_z(0)$ と壁でのトロイダル磁場 $B_z(a)$ の時間発展を示している。軸上でのトロイダル磁場 $B_z(0)$ と壁でのトロイダル磁場 $B_z(a)$ は初期平衡段階において約70アルフェン時間まで増加する。これは抵抗性散逸効果によって初期平衡状態からずれることによって生じている。磁場反転の度合いが大きくなるにつれて、 B_z 分布は半径方向に広がり、そのとき $B_z(0)$ は時間と共に徐々に減少する。更に、 $B_z(a)$ は抵抗性散逸効果の抑制後、約40アルフェン時間で周期的な振動を繰り返しながら、反転磁場の度合いが深くなる。結果として、RFP配位が $(m=0; n \neq 0)$ モードを考慮しない $m=1$ モードのシングルヘリシティのみの非線形発展によって維持されることは興味深い。

トロイダル磁束 Φ_z とポロイダル電場 E_θ の時間発展を図2に示す。トロイダル磁束は初期平衡段階において徐々に減少し、その後50~80アルフェン時間の間は一定となる。これはダイナモ電場が抵抗性拡散による電場より小さいことによる。ダイナモ電場が効果的に作用し E_θ が負になるとき、トロイダル磁束 Φ_z は約40アルフェン時間の周期的な振動を伴って増加する。この振動は $B_z(a)$ にも観測されている。トロイダル磁束は負の E_θ の生成

段階において増加することが分かる。しかし、時間が経過するにつれて、この強度は減衰し僅かな負の E_θ に落ち着く。それ故、ダイナモ作用の準定常的な過程がプラズマ中に進行するにつれて、トロイダル磁束は僅かな負のポロイダル電場の生成によって維持される。

図3は($m=1; n=-10$)と($m=2; n=-20$)モードのシングルヘリシティの磁気エネルギーと運動エネルギーの時間発展を示している。初期平衡時にプラズマの軸上に共鳴面をもつ $m=1$ モードの磁場エネルギーは約90アルフェン時間まで指数関数的に成長し、その後徐々に飽和する。 $m=1$ モードの飽和磁場エネルギーは($m=0; n=0$)モードと比較して約3%程度である。この増加する傾向はトロイダル磁束と同じ様相を示す。一方、運動エネルギーは磁場エネルギーより約2桁小さい。更に、周期的な振動はポロイダル電場の時間発展と一致する。ポロイダル電場は運動エネルギーが増加するにつれて負の値に向かって減少し、その後、負のポロイダル電場分布を形成する。反対に、運動エネルギーが減少するときは正の E_θ 値に向かって増加することが分かる。それ故、負の E_θ の寄与、即ちダイナモ作用は $m=1$ モードの運動エネルギーの非線形発展に強く相関しており、トロイダル磁束の増加は $m=1$ モードの磁場エネルギーの成長と飽和過程と親密に関係していると言える。

図4は典型的な時刻における(r, z)平面での $m=1$ モードの磁場と、プラズマフロー(速度)パターンを示している。 $m=1$ の揺動磁場は最初にプラズマの外側領域で別々の渦構造をもって発展し、その後プラズマの軸上で一つの渦構造を形成する。この $m=1$ の揺動が強度的に発展し、しかも半径方向に広がる時、トロイダル磁場はトロイダル方向に $n=10$ の周期をもってヘリカル的に変形する。このような $m=1$ モードの時間と半径方向の発展は安全係数 q の半径方向分布の平坦化によって引き起こされる。この $m=1$ 磁気揺動の渦構造はRFP配位および維持段階を通じて同じ方向に成長することに注意したい。一方、プラズマのフロー構造は揺動磁場とは違った振舞いを示す。初期平衡段階(10アルフェン時間)において、フローはプラズマの中心付近で半径方向に駆動されプラズマの外側に向かって小さくなる。この速度成分は抵抗性散逸効果のために初期平衡分布の半径方向の変形によって引き起こされる。 $m=1$ の不安定性が(60~70アルフェン時間において)成長し始めるにつれて、プラズマ中心付近のフローは、ダイナモ作用が抵抗性拡散の作用より優位となるため、(r, z)平面において渦構造を形成する。言い換えると、このフローがポロイダル成分をもった渦を形成する。トロイダル方向の速度がプラズマの軸上で渦構造的に発展するとき(80~100アルフェン時間において)、 E_θ の値は負となり磁場反転面の内側のトロイダル磁場が強められ、そのときトロイダル磁束が増加する。反対に、プラズマの外側の領域で別々の渦構造が(110~120アルフェン時間において)発展するにつれて E_θ の値は正となり、そのときトロイダル磁束は減少する。結果として、RFPプラズマのダイナモ作用はプラズマの軸上において渦構造をもつトロイダル速度の出現によって生成・維持されることが分かる。

図5は典型的な時刻における $m=1$ モードによって誘起されるポロイダル電場 $\varepsilon_\theta = v_r B_z - v_z B_r$ の(r, z)平面におけるステレオ描写と $\varepsilon_\theta < 0$ (斜線部分)領域を示している。トロイダル磁束の抵抗性減衰段階では、 ε_θ はプラズマ中心付近において正となり反ダイナモ作

用を与える。しかも逆転面においても正となる。しかし、逆磁場配位領域におけるポロイダル電場は常に負となる。即ち、 $m=1$ モードによる $\varepsilon\theta$ は反転磁場上ではダイナモ効果として作用する。プラズマ中心付近での正の値をもつ $E\theta$ が時間と共に徐々に減少するにつれて、 $m=1$ のヘリカル構造が逆転面の内側に出現する。この時刻はトロイダル速度がプラズマの軸上で渦構造を形成する時刻に相当する(図4(b)参照)。この負の $\varepsilon\theta$ 分布がプラズマの外側に向かって広がる時、トロイダル磁束が増加する。一方、 $\varepsilon\theta$ のヘリカル構造が失われ、しかも逆転面の内側で全体的に正となるときのトロイダル磁場は減少する。従って、トロイダル磁束の増加と減衰は、プラズマの軸上で渦構造をもつトロイダル速度の発生によって駆動される、ポロイダル電場の負と正の発展の繰り返しによって生じる。結果として、トロイダル速度と半径方向磁場との非線形相互作用によって生成されるポロイダル電場がトロイダル磁束の増加に対して最も支配的な源である。

3. まとめ

RFPプラズマのダイナモ機構を3次元抵抗性MHDシミュレーションを用いて、RFP配位の維持過程におけるMHD挙動とダイナモ機構について議論した。特に、RFPプラズマにおける磁場揺動とプラズマフローの非線形相互作用によって生じるダイナモ電場の物理的機構に注目した。

初期平衡磁場分布が抵抗性散逸効果によって崩れるとき、半径方向のプラズマフローがプラズマの中心付近で駆動される。そのときのフローは (r, z) 平面で渦構造を形成し磁気揺動が半径方向に増加するとき、ポロイダル電場が磁場反転面の内側で螺旋的に生じトロイダル磁束の抵抗性崩壊は抑制される。このヘリカル電場が強度的に増加しプラズマの外側に向かって連続的に広がる時、トロイダル磁束が増加する。この電場は $(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$ のダイナモ項における $-v_r B_z$ よりもむしろ $v_z B_r$ の優位な作用によって負に生じる。特に、 $m=1$ モードの揺動磁場の渦構造は磁気拡散とダイナモ段階を経て同方向に増加する。そして、ダイナモ電場はプラズマの軸上で渦構造をもつトロイダル速度の発生によって生成・維持される。それ故、ダイナモ作用は $m=1$ モードの運動エネルギーの非線形発展に関係し、トロイダル磁束の増加は $m=1$ モードの磁気エネルギーの成長と飽和過程によって生じると言える。

従って、RFP配位の維持は $(m=0; n \neq 0)$ モードを考慮しない $m=1$ モードのシングルヘリシティのみの非線形発展によって成し遂げられる。すなわち、RFP配位の維持は抵抗性共鳴モードである $(m=1; n=-10)$ モードのシングルヘリシティ発展によって成し遂げられる。この $m=1$ モードの非線形発展は磁場反転面の内側でトロイダル磁場を増加させ、RFP配位が維持される。結果として、トロイダル速度 v_z と半径方向の磁場 B_r の非線形相互作用によって生じるポロイダル電場がRFPプラズマでのダイナモ作用の重要な源である。

参考文献

- 1) A. Nagata, K.I. Sato, H. Ashida, and T. Amano: Phys. Fluids B 5, 1 (1993).

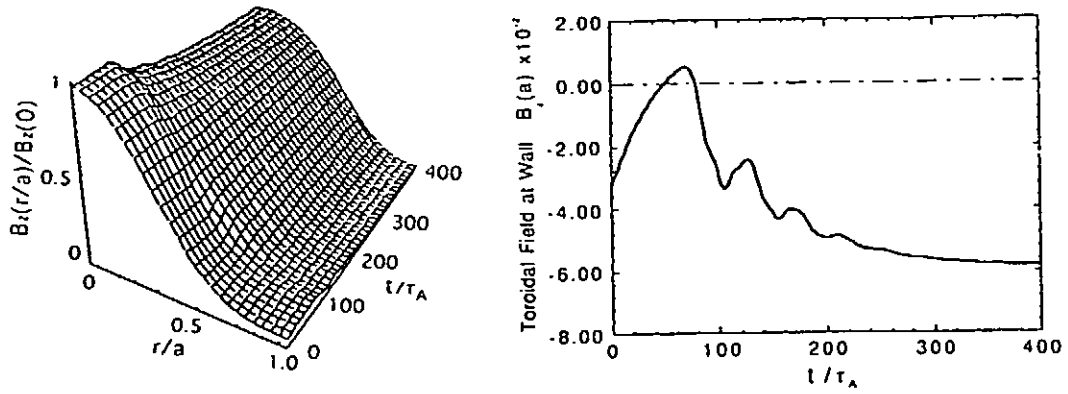


FIG. 1. Time evolutions of the toroidal field profile $B_z(r/a)/B_z(0)$ and the toroidal field at the wall $B_z(a)$, respectively.

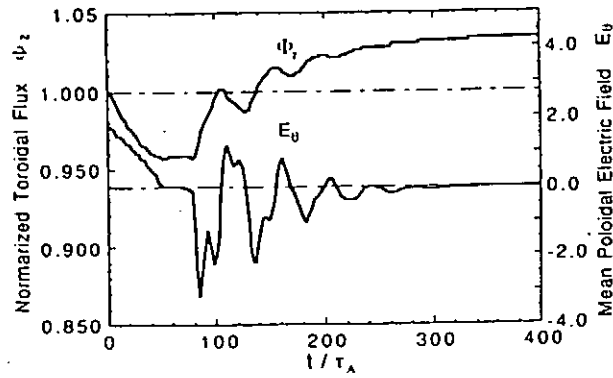


FIG. 2. Time evolutions of the normalized toroidal flux Φ_z and the poloidal electric field E_θ respectively.

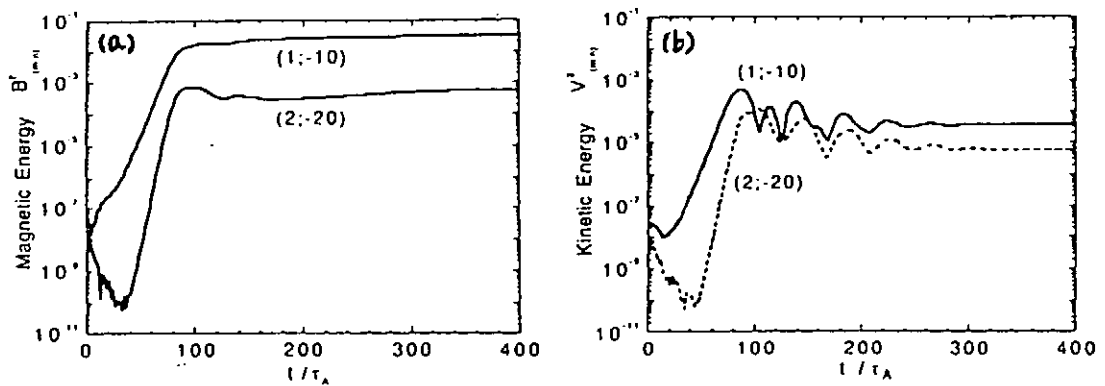


FIG. 3. Time evolutions of (a) the magnetic field energy and (b) the kinetic energy in the single helicity of $(m=1;n=-10)$ and $(m=2;n=-20)$ modes, respectively.

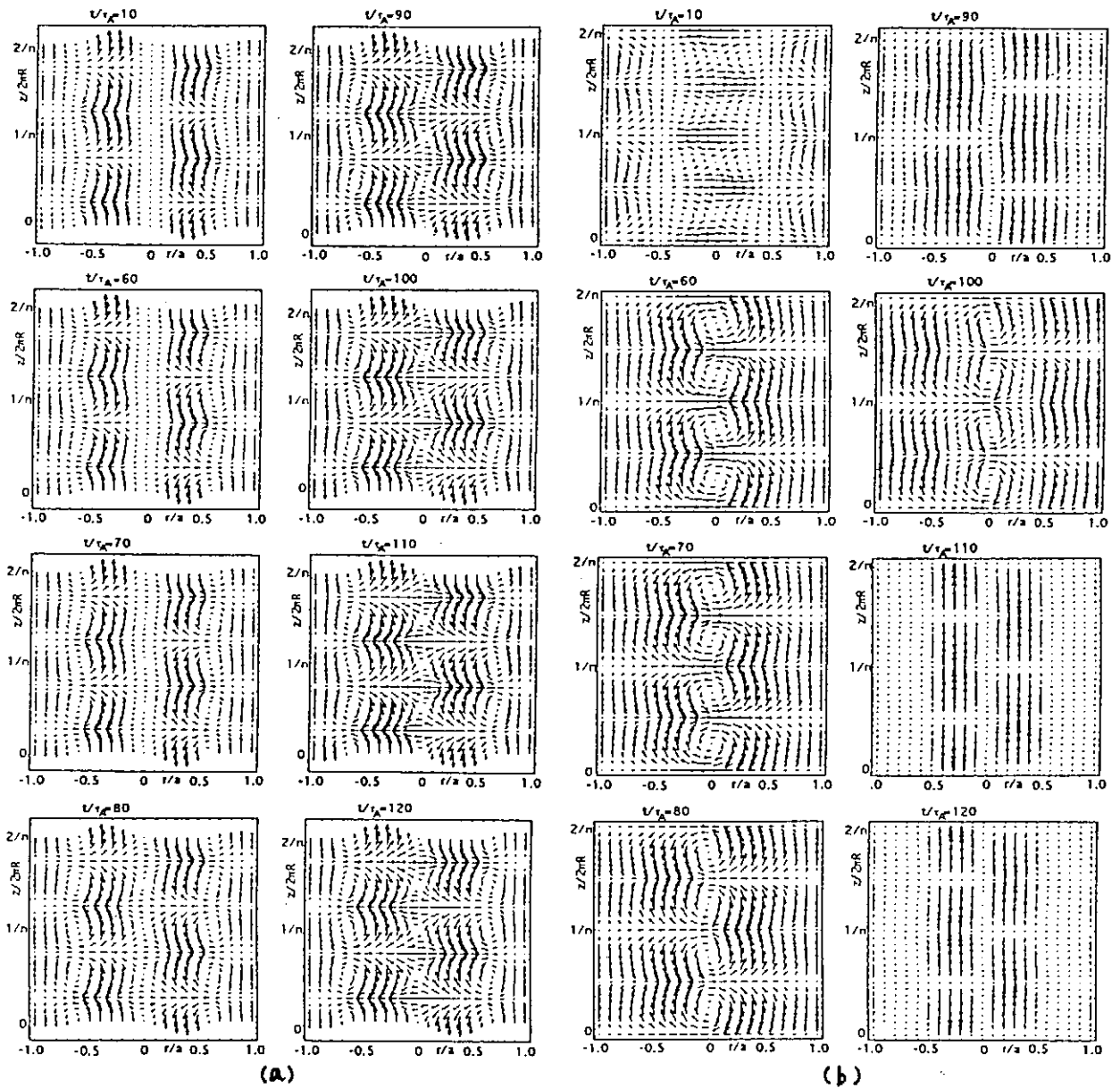


FIG. 4. The patterns of (a) the magnetic field and (b) the plasma flow (velocity) of the $m=1$ mode on the (r,z) plane at several times, respectively.

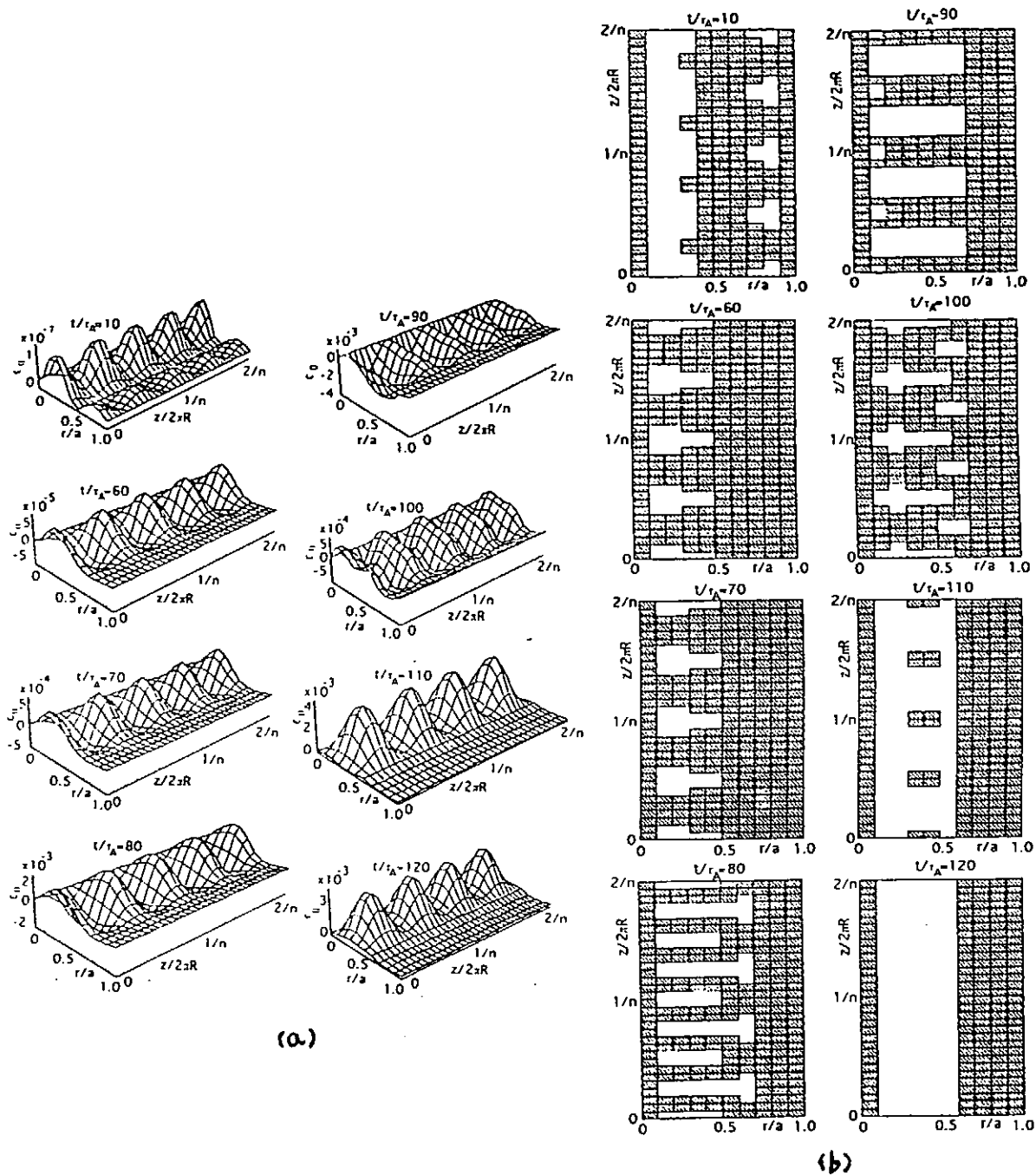


FIG. 5. The (a) stereo descriptions and (b) regions of $\epsilon_\theta < 0$ (parts of the shadow) of the induced poloidal electric field $\epsilon_\theta = v_\theta B_r - v_r B_\theta$, due to the $(1; -10)$ mode on the (r, z) plane at several times, respectively.

逆磁場ピンチにおける磁場の自己組織化とカオス。磁場解析の課題。

電子技術総合研究所プラズマ研究室

平野洋一、P. Brunzell、八木康之、島田寿男、前嶋良紀、弘田公

1. 逆磁界ピンチにおける磁場の自己組織化

逆磁場ピンチは、構造の単純な弱い外部磁場で高温・高ベータのプラズマが容易に得られる等、核融合を目指したプラズマ閉じ込め装置として多くの特徴を持っている[1]。しかしながら、プラズマ内部の磁場分布は、トロイダル磁場の向きがプラズマの中心部と周辺部で逆転した複雑な構造をしている。準定常的な状態を考えると外部から引加できる平均的な電場はトロイダル方向の電場だけなので、プラズマの電気抵抗に逆らってトロイダル方向のプラズマ電流を準定常的に維持することは可能であるが、ポロイダル方向のプラズマ電流、即ち、この様なトロイダル磁場の分布を維持することはできないはずである。しかし、現実の逆磁界ピンチプラズマでは予想に反して、条件を適当に設定すると（トロイダル電場によりプラズマ電流を保持すると同時に、プラズマ表面のトロイダル磁場を一定に保つ）この様な逆磁場ピンチの磁場分布が自律的に生成・維持される。これはある境界条件のもとではプラズマ中の磁場分布は、磁場エネルギーが最小となる状態へ緩和するという性質をプラズマが持っているからである。この磁場の緩和現象はダイナモ効果、あるいは、自己反転現象と呼ばれている。逆磁場ピンチのこの性質は太陽表面におけるフレアの発生と並んで電磁流体力学系における磁場構造の自己組織化の一つの例であると考えられる[2, 3]。

一般化されたオームの法則は

$$\langle \eta j \rangle = \langle E \rangle + \langle v \times B \rangle$$

と書けるので（ただし、 $\langle \rangle$ は系の揺動成分の周期よりは十分長く、系全体の時間変化よりは短い時間での平均）、平均的なポロイダル方向の電場がゼロでも、プラズマの運動と磁場のベクトル積が平均的なポロイダル成分を持てば、配位の維持に必要な平均的なポロイダル電流が保持されることが分かる。即ち、逆磁場ピンチの磁場配位の維持には、MHD

Activityによるプラズマの運動と磁場揺動の非線形的な相互作用が大きな役割を果たしている。（電子の運動論的な振舞いによって配位が維持されるというモデルも提案されているが、ここでは省略させていただく。）逆磁場ピンチの配位維持におけるこのMHD Activityの具体的なメカニズムは、実験と数値計算により解析が進められ、かなりの程度解明されてきた。

最近、中規模逆磁界ピンチ実験装置TPE-1RM20 ($R/a=75/19.2\text{cm}$)で、逆磁場ピンチの準定常維持時における磁場揺動の詳細なモード解析がおこなわれ、いくつかの興味ある結果が得られたので次節で紹介する[4]。

2. 磁場の自己組織化過程における磁場揺動の解析 (TPE-1RM20の実験結果)

先ず最初にTPE-1RM20の典型的な放電波形を図1に示す。

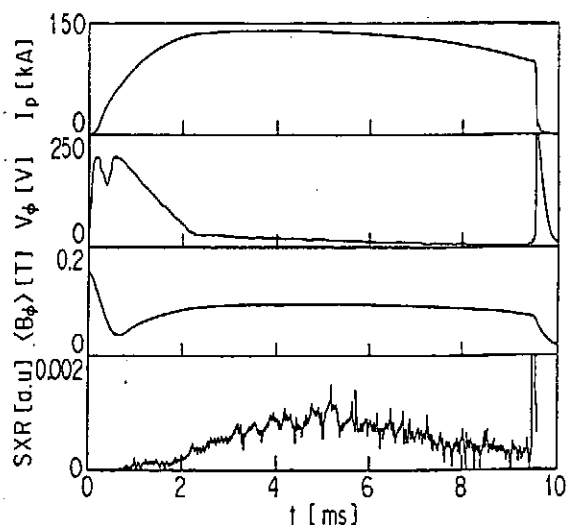


図1 TPE-1RM20の典型的放電波形
プラズマ電流 (I_p)、トロイダル周回電圧 (V_ϕ)、プラズマ中の平均トロイダル磁場 ($\langle B_\phi \rangle$)、軟X線の強度 (SXR)。

解析を行った放電のプラズマ電流のピーク値、電流ピークでの周回電圧、電子温度、電子密度、イオン温度、ポロイダルベータ、エネルギー閉じ込め時間の値は、それぞれ、135kA、15V、550eV、 $1 \times 10^{19} \text{m}^{-3}$ 、300eV、0.1、0.3ms 程度である。

TPE-1RM20のみならず逆磁場ピンチ一般の磁場揺動の解析で特徴的なことは、ピンチパラメータと呼ばれる一つのパラメータに依存して磁場揺動の様相が変わることである。ただし、ピンチパラメータとはプラズマ表面のポロイダル磁場をプラズマ中の平均トロイダル磁場で割ったもので、プラズマ電流の中心への集中度に対応している。即ち、低い Θ (< 1.65) の場合には小さなレベルの揺動 (ポロイダル磁場の1-2%) がほぼ連続的に現れるのに対して、高 Θ (> 1.65) の領域では揺動レベルが大きく、しかも揺動が比較的静かな時期と大きな揺動が現れる時期とが交互に間欠的に出現する。軟X線の信号も、低 Θ では細かな連続的な振動が現れるのに対して (図1)、高 Θ ではトカマクの鋸波振動に類似した大きな振動が現れる (図4)。

低 Θ と高 Θ の場合の磁場揺動のモードの変化の例としてTPE-1RM20の解析結果を図に示す。図2は低 Θ (~ 1.55) 時の異なる n を持った $m=1$ モードの時間発展である。

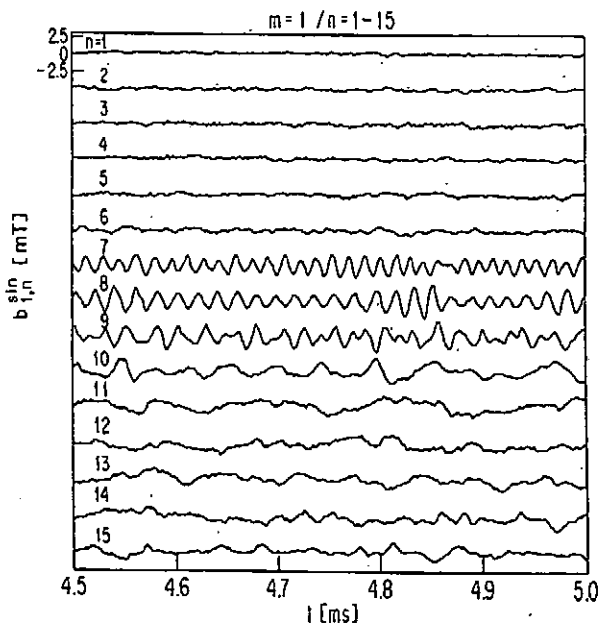


図2 低 Θ 領域での $m=1$ モードの時間変化。

図から、 $n=7, 8, 9$ のモードが主に立っていることが分かる。これらのモードは中心付近で磁力線のピッチと共鳴するモードである。図3には $m=0$ と1のモードの n スペクトルを示す。ただし、プラズマ電流のフラットトップの間 (3.5-5.5ms) の5ショット平均である。この図から、最小の n 値を持った共鳴 $m=1$ モードが最も大きく、 n が大きくなるにしたがって、次第にモードの大きさは小さくなって行くこと、非共鳴 ($n < 7$) の $m=1$ モードはノイズレベル程度であることが分かる。 $n=7, 8, 9$ のモードの振動周期はリジッドロータモデルを仮定してプラズマが回転していると考えたときの値とよく一致しており、ポロイダル方向の回転周波数として $171 \pm 16 \text{ kHz}$ 、トロイダル方向として $14 \pm 2 \text{ kHz}$ が得られる。

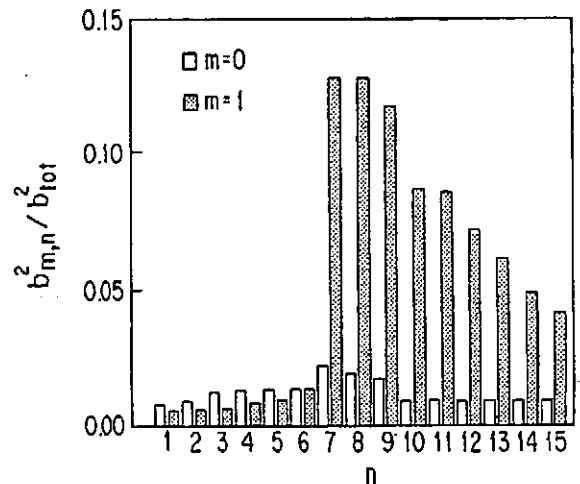


図3 低 Θ 領域での $m=0, 1$ モードの n スペクトル。

高 Θ (> 1.65) 領域におけるフーリエモードの時間変化は2種類のものに分けることができる。その一つは高 Θ 特有のもので単一の共鳴モードの成長により特徴づけられ、もう一つのは多数の共鳴モードの同時的な成長により特徴づけられる。後者は、揺動レベルが2倍以上大きく各モードの相対的な大きさも異なっているなど、いくつかの差異はあるものの、基本的な様相は低 Θ の場合と類似している。

先ず図4に前者の例としてプラズマ中のトロイダル磁束生成時（この時、磁場分布はよりエネルギーの低い状態へと緩和すると共に、軟X線の放射強度が急速に低下する）の $m=0$ と1モードの時間発展を、図5と6にその時刻近辺での n スペクトルの分布を示す。ただし、図5はトロイダル磁束生成時の直前を、図6は最中を示している。

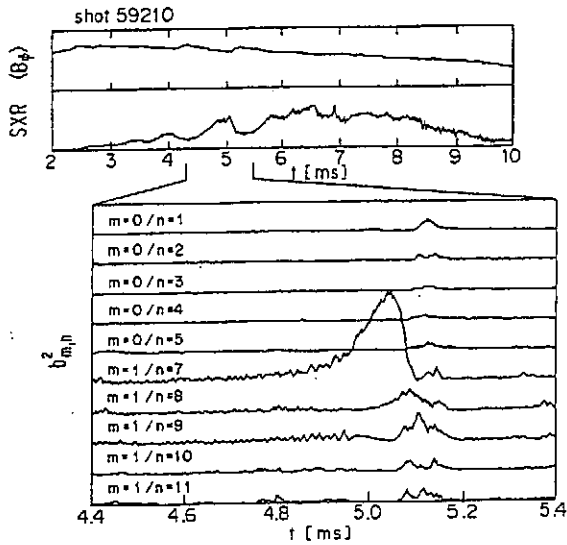


図4 高 θ 領域での磁場揺動のモードの時間変化。 $n=7$ の単一モードが立つ場合。軟X線強度の時間を同時に示した（上図）。

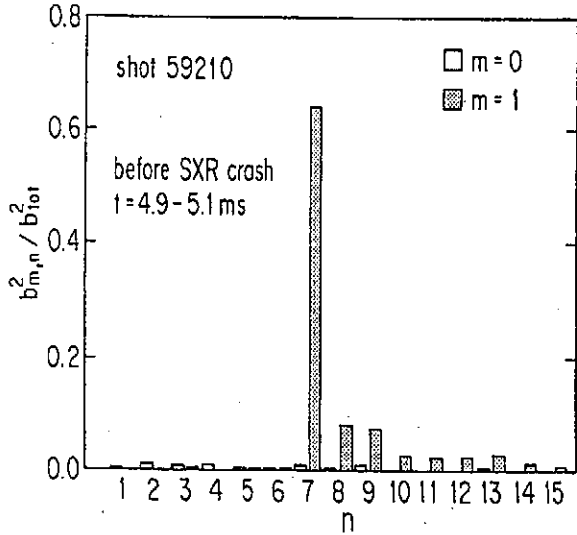


図5 4図に対応する $m=0, 1$ モードの n スペクトル。緩和の起こる前。

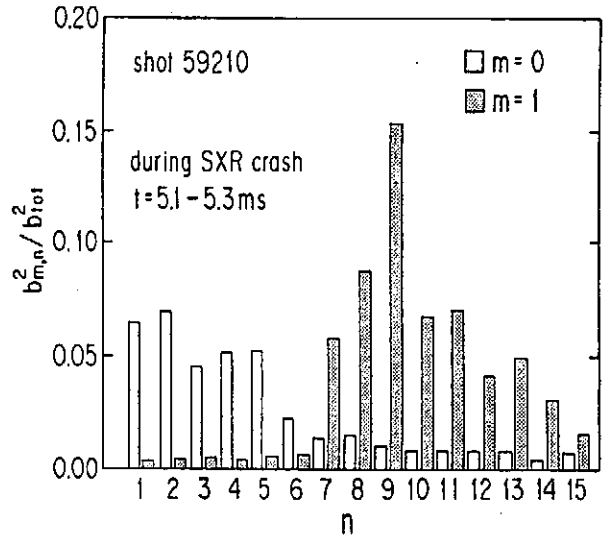


図6 4図に対応する $m=0, 1$ モードの n スペクトル。緩和の最中。

これらの図から緩和過程におけるMHD Activitiesの振舞いの一つの描像が明かに示される。即ち、中心付近で共鳴する $m=1, n=7$ モードの緩やかな成長とモードの回転、次いで回転の停止とモードの急速な成長、 $m=1$ モード間の非線形的な相互作用による低 n の $m=0$ モードの成長と $m=1$ モードの高 n 領域へのカスケード（ n 分布の広がり）である。このモードの時間的发展はモードの回転とその停止のところを除いては、シミュレーションの結果と良く一致している（シミュレーションでは静電場を考慮しないのでプラズマの回転は現れない）。

次に後者の例として図7と8にトロイダル磁束の増加前後（磁場の緩和の前後）における $m=0$ と1モードの n スペクトル分布をしめす。低 θ の場合と同様に緩和の前から広い n スペクトルの広がりを持っているが、 n の値に対する依存性は低 θ の場合ほど明瞭ではない。また、緩和後に $m=0$ のモードの大きさが $m=1$ モードより大きくなっている点が低 θ の場合との大きな差である。

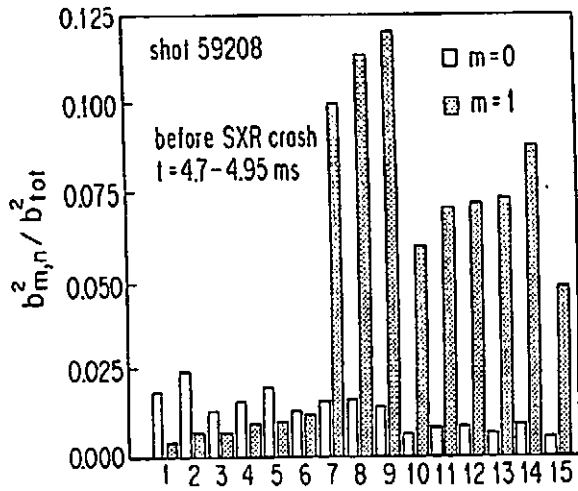


図7 高 θ 領域における $m=0, 1$ モードの n スペクトル。最初から多数のモードが立つ場合。緩和の起こる前。

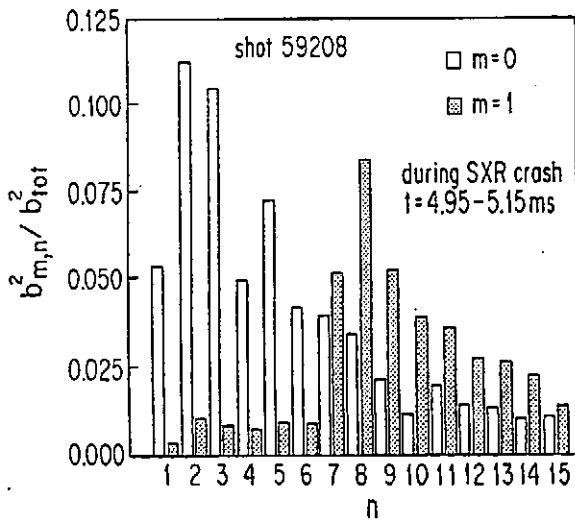


図8 高 θ 領域における $m=0, 1$ モードの n スペクトル。最初から多数のモードが立つ場合。緩和の最中。

3. 磁場の自己組織化とカオス的な磁場分布。 磁場解析の課題。

既に述べた様に、逆磁場ピンチではプラズマと磁場との非線形的な相互作用（ダイナモ効果）により磁場分布はよりエネルギーの低い状態へと緩和する。この緩和により過剰な磁場エネルギーが放出され磁場配位は自律的に維持される（磁場の自己組織化）。しかし、この緩和過程においては残念ながら磁場エネルギーだけではなくプラズマのエネルギーの放出も同時に起こってしまう。即ち、この緩和過程においては上に示したように複数のフーリエモードが発生して互いに相互作用をすることが本質的であるが、その際各々のモードに対応する磁気島の重なり合が生じて磁気面が破壊され、磁力線がストキャスティックになってプラズマの輸送が増大すると考えられる。

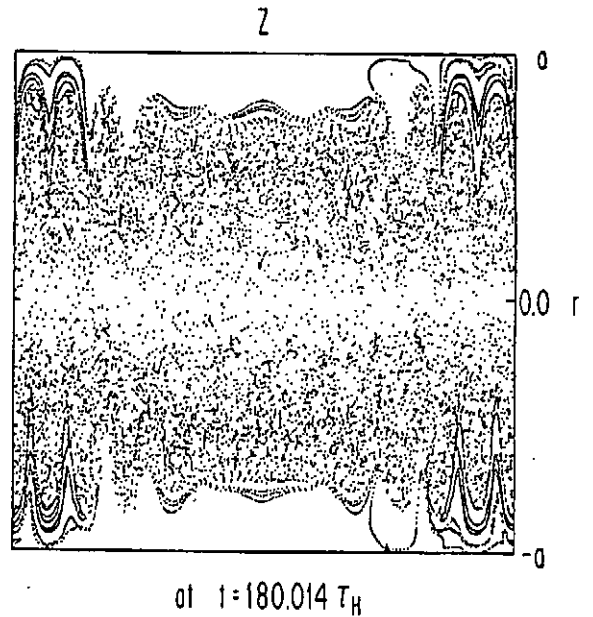


図9 緩和現象が起こっている最中の磁力線のポアンカレプロット。シミュレーションの結果[5]。

図9にシミュレーションによって求めた、緩和が起こったときの磁力線の $r-z$ 面上のポアンカレプロットを示す[5]。ただし、シミュレーションは円筒プラズマの場合である。これから一本の磁力線が

非常に広範囲のプラズマ断面を覆うこと分かり、磁力線の空間分布がカオス的になっていることが予想される。この様に磁力線が分布すると、平均的な磁力線に対する直角方向のプラズマの拡散に対して、磁場の揺動（半径方向成分）と磁力線方向の粒子の運動（一般的には熱運動）が重要な意味を持つ。即ち、プラズマの輸送において Rochester-Rosenbruth タイプの拡散が支配的になると考えられ、通常の磁場を横切る拡散より数百倍以上大きなプラズマの損失が発生すると予想される。従って、逆磁場ピンチのプラズマの輸送現象には磁力線のカオス的な性質が重要な役割を演じている可能性が高いが、これを実際の磁場の計測からどの様にして確かめ、かつその性質を明らかにすることが出来るかが実験の大きな課題である。

しかし、実験データの解析には、解決の困難な二つ問題が存在する。

その一つは、磁力線の構造が空間的にカオス的になっているとき、実際の磁場計測ではどうなるかという点である。即ち、磁場揺動は空間的に限られた位置（プラズマの外側）と限られた個数のピックアップコイルによって計測され、得られるデータは各計測点の時系列データである。これらのデータをどの様にして空間構造のデータに焼き直すかが問題である。もしプラズマが回転していれば、固定した観測点でも実効的にはプラズマ表面を連続的になぞったことと等価になるので、その場合には時系列データと空間構造との対応を容易に行える可能性がある。うまく行けば1点の観測点の時系列データだけで解析が可能かも知れない。ただし、実際の計測データの解析に取り掛かる前に、シミュレーション結果のデータを用いてこの対応を調べて、空間構造がカオス的な時とそうでない時に時系列データにどのような違いがでるか、通常用いられる埋め込み次元やリアプノフ数といった手法が有効であるかどうか確かめておく必要がある（シミュレーションのプラズマは回転しないので、計測点の方を回転させる必要がある）。

もう一つの問題は、磁力線の空間構造は常にカオス的であるのではなく磁力線の緩和が起こる比較的短い間だけカオス的である可能性がある点である。先の図4、5、6から分かるように、高 Θ の場合は比較的長い単一モードのコヒーレントな振動期間と多数のモードが生じて相互作用を行う比較的短い緩

和期間に別れ、おそらくコヒーレントな振動期間は磁力線分布はカオス的ではなく、磁力線の空間構造がカオス的になるのは比較的短い緩和期間のみであると考えられる。そして大きなプラズマの損失が発生するのはこの時期である。時系列のデータの中の短い期間にのみ断続的に現れるものをどう解析したら、その状態がカオスであるか、またカオスであるとしたらその性質はいかなるものであるか、といった点をどの様にして解析するかが問題ある。この点についてもシミュレーションの結果を用いて解析手法を開発して行くことが今後の課題であろう。ただし、低 Θ の場合は揺動はレベルは小さいがモードのフーリエスペクトルは時間的に大きくは変化せず（カオス的な状態が持続している可能性がある）、揺動の回転も観測されているので、限られた数の観測点の時系列データの解析から、磁力線分布がカオス状態であるかどうかを識別することが可能であるかもしれない。

4. まとめ

逆磁場ピンチでは磁場のエネルギー最小状態への緩和時に、磁力線の空間分布がカオス的になり、プラズマの損失を増大させている可能性が考えられるが、実験における磁場揺動の観測データ（限られた測定点の時系列データ）から、これを明らかにするにはかなりの困難があると予想される。実験データの解析にとりかかる前に、磁場分布が全ての時間で原理的には分かっている、シミュレーションの結果を用いて、解析方法の開発を行っておく必要があると考えられる。

[参考文献]

- [1]平野洋一, 小川潔;核融合研究, 65(6) (1991) 601
- [2]政宗貞男, 平野洋一;核融合研究, 68(3) (1992) 268
- [3]吉田善章;日本物理学会誌, 48(2) (1993) 73
- [4]P. R. Brunsell, et. al.; Physics of Fluids, 5(3) (1993) 885
- [5]K. I. Sato, et. al.; Proc. of 11th Int. Conf. on Plasma Phys. and Controlled Nuclear Fusion Research, IAEA, Kyoto, 2(1986) 413

NIFS-MEMOシリーズ出版リスト
(Recent Issues of NIFS-MEMO Series)

- NIFS-MEMO-1 都築哲哉、東井和夫、松浦清剛、「パソコンによる JIPP T-IIU プラズマの平衡位置フィードバック制御」1991年4月
T.Tsuzuki, K.Toi and K.Matsuura, "Feedback Control of Plasma Equilibrium with Control System Aided by Personal Computer on the JIPP T-II Tokamak" ; Apr.1991 (In Japanese)
- NIFS-MEMO-2 久保田雄輔、大林治夫、宮原 昭、大野和子、中村光一、堀井憲爾、「環境磁界の研究 (I) 三次元積分磁束計の開発」1991年7月
Y.Kubota, H.Obayashi, A.Miyahara, K.Ohno, K.Nakamura and K.Horii, "Development of Three-Dimensional Compact Magnetic Dosimeter for Environmental Magnetic Field Monitoring" , July,1991 (In Japanese)
- NIFS-MEMO-3 「核融合科学研究所技術研究会; 1991年3月19、20日 土岐文化プラザ」1991年8月
"Proceedings of Symposium on Technology in Laboratories; Mar. 19, 20, 1991" Aug. 1991 (In Japanese)
- NIFS-MEMO-4 「プラズマ中におけるカオス現象」1991年8月
"Chaotic Phenomena in Plasmas " , Aug. 1991 (In Japanese)
- NIFS-MEMO-5 山崎耕造、「ファジー論理のトロイダルプラズマ制御への応用」1992年2月
"Fuzzy Logic Application to Troidal Plasma Control " , Feb. 1992 (In Japanese)
- NIFS-MEMO-6 平成3年度 核融合科学研究所 支援調査共同研究報告書 「大出力マイクロ波源の開発に関する調査研究」1992年4月
"Development of High Power Microwave Source " , Apr. 1992 (In Japanese)
- NIFS-MEMO-7 平成3年度 核融合科学研究所 共同研究(調査支援研究)研究成果報告書 「プラズマにおけるカオス現象」1992年11月
"Chaotic Phenomena in Plasma, II" , Nov. 1992 (In Japanese)
- NIFS-MEMO-8 NIFSシンポジウム報告書「核融合炉材料照射用強力中性子源の設計と大学の役割」1993年1月
"Design of Intense Neutron Source for Fusion Material Study and the Role of Universities" , Jan. 1993 (In Japanese)
- NIFS-MEMO-9 平成2、3、4年度 核融合科学研究所共同研究研究会研究成果報告書 「開放磁場における電位と輸送機構」1993年4月
(Ed.) K. Yatsu and T. Hatori
"Potential Formation and Transport in Open Field Line Systems" , Apr. 1993 (In Japanese)
- NIFS-MEMO-10 伊藤公孝、「人口太陽は燃えるか -核融合研究最前線-原子力オープン・スクール講演」1993年5月
K. Itoh
Reports of NIFS Collaboration Workshop from 1990 to 1992 at National Institute for Fusion Science.
"At the Front of Fusion Research -Introductory Lecture Open to Public-" , May 1993 (In Japanese)
- NIFS-MEMO-11 (Ed.) T. Kato
"Atomic Physics and Radiation in Divertor and/or Disruption Plasmas" , Aug. 1993 (In English)